REPRESENTACIONES SEMIOTICAS EN EL APRENDIZAJE DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

LUZ ELENA OSORIO MANSILLA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MANIZALES

MAESTRIA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS

MANIZALES

REPRESENTACIONES SEMIOTICAS EN EL APRENDIZAJE DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

LUZ ELENA OSORIO MANSILLA

Profesor guía:

Mg. LIGIA INÉS GARCIA

Propuesta de Tesis presentada a la Facultad de Estudios Sociales y Empresariales de la Universidad Autónoma de Manizales, para optar al título de Magister

Manizales, Colombia

2011

AUTORIZACIÓN PARA LA REPRODUCCIÓN DE LA TESIS

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica que acredita al trabajo y a su autor.

FECHA__________________ ______________________

FIRMA

____

DIRECCIÓN

____

E-MAIL - TELÉFONO

CONTENIDO

INDICE DE FIGURAS 6
INTRODUCCION 7
DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO 9
1.1 Planteamiento de Problema de Investigación y Justificación 9
1.2 Objetivos 13
1.2.3 Objetivo General 13
1.2.4 Objetivos específicos 14
ESTADO DEL ARTE Y REFERENTE TEÓRICO 15
2.1 Antecedentes 15
2.2 Referente Teórico 17
2.2.1 Las representaciones semióticas 18
2.2.3 El Teorema 25
DISEÑO METODOLÓGICO 32
3.1 Diseño 34
3.2 Instrumentos y Técnicas de Recolección de Información 35
3.2.1 Exploración De Ideas previas 36
3.2.2 Intervención En Aula 37
3.3 Procedimiento 41
3.3.1 Plan de Análisis 42
ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN 49
4.1 Análisis Descriptivo 49
4.1.1 Principales Hallazgos Instrumento De Ideas Previas 49
4.1.2 Aspectos Relacionados con el Tratamiento y la Conversión de Representaciones Semióticas del Teorema de Pitágoras 56
4.2 Análisis Interpretativo de Aspectos Relacionados con el Tratamiento yla Conversión de Representaciones Semióticas del Teorema de Pitágoras 62
4.3 Análisis Comprensivo Desde el Aprendizaje del Objeto Matemático Teorema de Pitágoras 84
CONCLUSIONES 90
RECOMENDACIONES 93

LISTA DE REFERENCIAS 95

ANEXOS 97

INDICE DE FIGURAS

Figura 1. Resultados pruebas SABER 2006 10
Figura 2. Resultados pruebas SABER 2009. 10
Figura 3. Transformación de representaciones semióticas.......... 21
Figura 4 . Teorema de Pitágoras. 26
Figura 5. Demostración Teorema de Pitágoras 27
Figura 6. Proposición I: 41 Elementos de Euclides 27
Figura 7. Demostración 1 Teorema de Pitágoras.......... 29
Figura 8. Demostración 2. Teorema de Pitágoras.......... 30
Figura 9. Continuación Demostración 2 Teorema de Pitágoras 30
Figura 10. Diseño de la investigación.......... 34
Figura 11. Estructura de la unidad didáctica 38
Figura 12. Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica.......... 58
Figura 13. Descomposición en unidades significantes del Teorema de Pitágoras 60
Figura 14. Congruencia entre registros de representación del Teorema de Pitágoras del grupo 1 66
Figura 15. Congruencia entre registros de representación del Teorema de Pitágoras del grupo 2 72
Figura 16. Congruencia entre registros de representación del Teorema de Pitágoras del grupo 3 78
Figura 17. Tratamiento de representaciones 81

INTRODUCCION

Este estudio se suscribe en el campo de la didáctica de la matemática, considerando que dentro de los programas de investigación que se proponen desde esta disciplina, se estudian aspectos relacionados con teorías del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, donde se han consolidado diversos enfoques de investigación, entre ellos el semiótico. (Font, 2002).

La investigación buscó comprender las actividades cognitivas (de tratamiento y conversión) que realizaron un grupo de estudiantes en el aprendizaje del concepto Teorema de Pitágoras.

El presente trabajo incorpora la teoría desarrollada por Raymond Duval (2004) sobre tratamiento y conversión de registros de representación semiótica, dado que como lo plantea el autor, el aprendizaje de las matemáticas sólo se da en contextos de representación.

Dada la pluralidad de los sistemas semióticos, se permite que tal diversidad de representaciones de un mismo objeto, aumente las capacidades cognitivas de los estudiantes

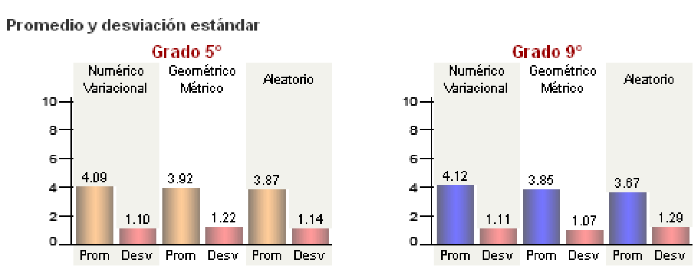
(Benveniste, 1974; Bresson, 1987 citado en Duval, 2004). Esta variedad cumple una función decisiva en la conceptualización.

Esta investigación permitió verificar que aunque existen múltiples representaciones semióticas alrededor del objeto matemático Teorema de Pitágoras, no todas se constituyen como válidas para generar procesos de congruencia con otros tipos de representación semiótica, debido a que la simple conversión de registros de representación sin que existan condiciones de congruencia entre ellos, no garantiza n la comprensión del objeto matemático.

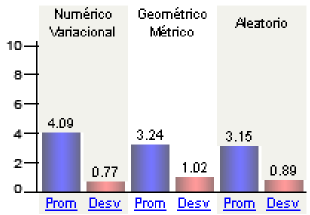
DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO

1.1 Planteamiento de Problema de Investigación y Justificación

Las pruebas SABER constituyen en Colombia una herramienta de evaluación en la educación del país. Sus resultados pueden evidenciar las fortalezas y debilidades en el conocimiento matemático de los alumnos, con el fin de que las instituciones educativas conozcan donde situar sus estrategias de mejoramiento. Es por ello que revisamos algunos datos estadísticos publicados en las dos últimas evaluaciones realizadas, correspondientes a los periodos 2006 y 2009:



Resultados nacionales pruebas SABER 2006



Grado 9°

Promedio y desviación estándar

Entidad	N Alum	Numérico Variacional		Geométrico Métrico		Aleatorio	
		Prom	Desv	Prom	Desv	Prom	Desv
NACIONAL	478,634	4.12	1.11	3.85	1.07	3.67	1.29
RISARALDA	9,715	4.10	1.11	3.81	0.97	3.46	1.19
BALBOA	48	3.99	0.77	3.35	1.01	3.26	0.88
SANTO DOMINGO SAVIO	38	4.09	0.77	3.24	1.02	3.15	0.89

Resultados locales pruebas SABER 2006

Figura 1. Resultados pruebas SABER 2006

Tomado de http://menweb.mineducacion.gov.co

Resultados locales pruebas SABER 2009

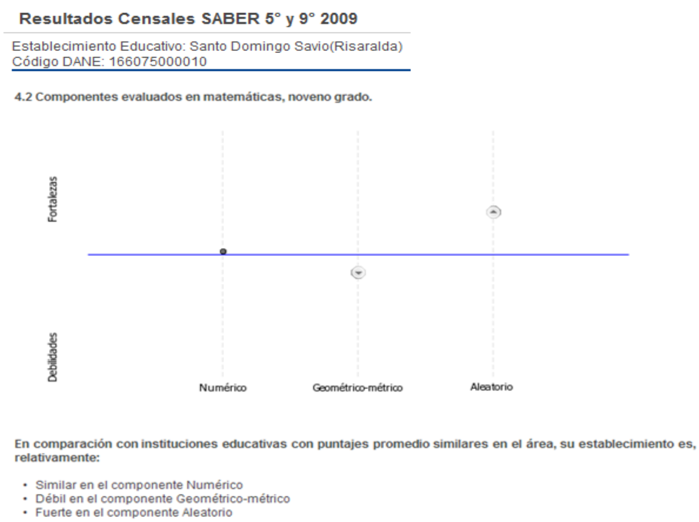


Figura 2. Resultados pruebas SABER 2009.

Tomado de http://www.icfessaber.edu.co

Estos datos corresponden a los resultados desagregados por componentes del pensamiento matemático. En ellos se puede evidenciar que en el periodo 2006, el componente numérico-variacional se encuentra en un nivel superior a los resultados obtenidos con respecto a otros componentes (geométrico-métrico en segundo lugar y aleatorio en tercer lugar), conservándose esta escala a nivel nacional, departamental y local.

Para el periodo 2009, de acuerdo con esta desagregación, puede observarse, que los resultados en el componente geométrico-métrico, pasan a un último lugar.

Respecto a este componente, en el cual nos centramos por presentar resultados relativamente bajos, y donde las recientes evaluaciones muestran haber declinado aún más; es importante anotar que en lo relacionado al componente geométrico-métrico, el ICFES (2007) se indagan aspectos que se relacionan con:

> La construcción y manipulación de representaciones de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos y sus transformaciones. Más específicamente, se refieren a la comprensión del espacio, el desarrollo del pensamiento visual, el análisis abstracto de figuras y formas en el plano y en el espacio a través de la observación, de patrones y regularidades, el razonamiento geométrico y la solución de problemas. (p.24)

Los bajos resultados obtenidos evidencian las debilidades que existen en la enseñanza de la geometría: Asunto que hace ya tiempo ha sido admitido, inclusive desde el mismo Ministerio de Educación Nacional MEN (1998), quien plantea: “El estudio de la geometría se había abandonado como una consecuencia de la adopción de la “matemática moderna”; desde un punto de vista didáctico, científico e histórico, actualmente se considera una necesidad ineludible volver a recuperarla" (p.56).

De igual manera, Vasco (2006) sostiene que:

> Desde un punto de vista psicológico y pedagógico, es que lo que se pensó como una carrera de obstáculos para filtrar la élite de la matemática francesa, se haya querido convertir en currículo general de matemáticas para todas las escuelas y colegios del globo. El resultado ha sido el abandono de la geometría en casi todas partes del mundo, la perdida de la más elemental imaginación tridimensional, y el entrenamiento de los jóvenes en la manipulación de sistemas simbólicos formales sin ninguna conceptualización que los sostenga, y sin ninguna posibilidad de aplicación fuera de los contextos triviales o esotéricos de los problemas que aparecen en los libros. (p.29).

Además se considera que la enseñanza tradicional de la geometría ha sido enfatizada al estudio memorístico de teoremas, propiedades y definiciones geométricas y entregadas a los estudiantes como un producto acabado de la actividad matemática que no cuenta con la participación activa del estudiante.

Es así que creemos que la enseñanza de la geometría se debe potenciar, generando estrategias donde se indaguen formas de organizar y proponer el proceso de enseñanza. Donde se vinculen situaciones que permitan a los estudiantes comprender sus conceptos, haciéndose necesario un estudio en profundidad en la manera como son abordados los objetos matemáticos a la vez que la verificación de procesos de conceptualización. Se propone reconocer diferentes registros de representación de un objeto matemático dado el contexto de representación en que está dada la matemática.

Para efectos de esta investigación se ha tomado como objeto matemático de estudio el Teorema de Pitágoras, considerando que este campo conceptual cuenta con la propiedad de vincular y unificar un gran número de proposiciones de las matemáticas en general, no sólo de la geometría, sino también de la trigonometría y la geometría analítica, involucrando otros aspectos que no sólo son geométricos, sino también de tipo variacional, aleatorio, métrico y numérico.

Por ello se propuso la siguiente pregunta de investigación:

> ¿Qué actividades cognitivas (de tratamiento y conversión) realizan los estudiantes a través de las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto Teorema de Pitágoras?

1.2 Objetivos

1.2.3 Objetivo General

Reconocer las actividades cognitivas (tratamiento y conversión) que realizan los estudiantes en el aprendizaje del concepto Teorema de Pitágoras.

1.2.4 Objetivos específicos

- Identificar las actividades cognitivas (tratamiento y conversión) que hacen los estudiantes en las representaciones semióticas del concepto Teorema de Pitágoras.

- Reconocer el papel que cumple el tratamiento y la conversión de representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto Teorema de Pitágoras.

- Identificar el aporte de otros aspectos didácticos (enseñanza y aprendizaje) que favorecen el tratamiento y la conversión de representaciones semióticas en el concepto Teorema de Pitágoras.

ESTADO DEL ARTE Y REFERENTE TEÓRICO

2.1 Antecedentes

Algunas investigaciones realizadas alrededor del concepto Teorema de Pitágoras se presentan a continuación:

Barreto (2009), en su artículo "Otras deducciones o extensiones del teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como un recurso didáctico", como antecedente aporta a la investigación porque muestra las múltiples formas en que puede abordarse el teorema de Pitágoras, desde una perspectiva geométrica y de alguna manera permite abordarlo desde otros tipos de pensamiento matemático.

La investigación realizada por Barreto (2009), involucra procesos caracterizados en la propuesta de Duval (1998) y otros autores como Torregrosa, G. y Quesada, H (2007), en donde el proceso cognitivo de visualización se relaciona con la forma geométrica de la figura, su configuración y razonamiento se basa en aplicar las afirmaciones matemáticas que les corresponda algebraicamente, permitiendo la construcción de una teoría que generaliza de cierta manera el Teorema de Pitágoras.

Garciadiego Alejandro (2002), presenta el artículo: "El teorema de Pitágoras como paradigma en la enseñanza de la geometría plana: Simplificar no siempre simplifica" el cual muestra como en un caso de demostración del Teorema de Pitágoras, la historia y filosofía de las matemáticas permiten percatarse de posibles problemas cognitivos en la práctica docente, en donde se simplifican conceptos matemáticos con fines didácticos generando errores metodológicos que se convierten en barreras para el alumno.

Según Garciadiego (2002), teniendo en cuenta que este Teorema, es de los que más demostraciones tiene, algunas de estas demostraciones sumamente informales y sencillas presentan objeciones en la mente de los estudiantes ya que en el momento de exponer la figura y explicar este principio no se tiene en cuenta las metas intermedias antes de poderlo demostrar con mayor grado de generalidad como la construcción de cuadrados, de rectas paralelas y perpendiculares, entre otras, y por el afán de simplificar la demostración se violan principios metodológicos, como el método constructivo, deductivo y el esfuerzo por apoyarse en el conocimiento anterior .

Este estudio aporta a la investigación ya que explora la enseñanza de este teorema, realiza algunas recomendaciones respecto a asuntos metodológicos como son el sintético y el analítico, además de examinar su abordaje en su acepción geométrica y algebraica.

2.2 Referente Teórico

El desarrollo de esta investigación buscó dar respuesta a aspectos de tratamiento y conversión de representaciones semióticas que favorecieran el aprendizaje de objetos matemáticos, para este caso el Teorema de Pitágoras. Lo que involucró la intervención de procesos cognitivos.

Dentro de la didáctica de la matemática, el marco problémico de esta investigación se ubicó en un enfoque semiótico, teniendo en cuenta las siguientes consideraciones:

El enfoque semiótico incorpora aspectos sobre las prácticas matemáticas, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. Su campo de investigación involucra todos los lenguajes y prácticas significantes que son esencialmente sociales. Esta investigación adoptó la teoría de registros de representación semiótica, expuesta por Raymond Duval (2004), dada la importancia de su estudio en los diferentes tipos de representación, considerando que el acceso y la comprensión de los objetos matemáticos no pueden darse sino por sus representaciones.

A continuación se relacionan los aspectos más importantes de esta teoría y que son de interés para esta investigación:

2.2.1 Las representaciones semióticas

Las representaciones semióticas juegan un papel primordial en la enseñanza de las matemáticas, ya que son las representaciones las que permiten el acceso a los objetos matemáticos, considerando que las matemáticas a diferencia de otras ciencias, está contenida de objetos no tangibles. Duval (2006) afirma: “la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación”. (p.144)

El campo del aprendizaje de las matemáticas involucra un análisis de procesos cognitivos como es la conceptualización. Éstos procesos requieren de la utilización de sistemas de representación diferentes a los del lenguaje natural, ya sea algebraica, geométrica, gráfica, simbólica, esquemas, imágenes … “que toman el estatus de lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar las relaciones y las operaciones” (Duval, 2004, p.13).

Ya que un objeto puede darse a través de diferentes representaciones, estas representaciones deben distinguirse del objeto matemático, sino no podría haber comprensión, pues ésta se perdería cuando se confunde el objeto matemático de su representación.

Respecto a las representaciones, es importante hacer la diferencia entre representaciones mentales y representaciones semióticas. Según Duval (2006), las representaciones mentales están conformadas por todo el conjunto de concepciones o imágenes que un individuo tiene acerca de un objeto, son la interiorización de las representaciones semióticas; y las representaciones semióticas son las producciones constituidas por el empleo de signos; no son más que el medio por el cual disponen los individuos para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles y accesibles a otros. Estas además de cumplir una función de comunicación, tienen una función de objetivación, son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma, del funcionamiento cognitivo del pensamiento, del tratamiento de la información, de la toma de conciencia y de la comprensión.

Según Duval (2004), en el aprendizaje de las matemáticas, se ha podido demostrar que cambiar la forma de una representación es para muchos alumnos una operación difícil y a veces imposible. “Todo sucede como si para la gran mayoría de los alumnos la comprensión que logran de un contenido quedara limitada a la forma de representación”. (p. 28)

Schoenfeld, comprueba este hecho en un curso de enseñanza de geometría, en donde habla de compartimentalización inadecuada, y plantea que los estudiantes no establecen las conexiones entre las representaciones semióticas y el contenido representado que nosotros esperaríamos que hicieran. Pocas veces lo logran. (Schoenfeld, 1986, p.239, p.242, citado por Duval, 2004, p.29). [1]

Esto muestra la complejidad entre las operaciones de conversión de un sistema a otro y el logro de su correspondencia, ya que no son procesos cognitivamente neutros, ni es una actividad trivial o espontánea del individuo.

El papel de la semiosis, suscita pues procesos que se involucran en el funcionamiento del pensamiento, el desarrollo de los conocimientos y las condiciones para realizar la diferenciación en las representaciones semióticas entre representante y representado.

Los sistemas semióticos considerados desde un punto de vista de su diversidad y su papel con el funcionamiento del pensamiento, Duval (2004) plantea tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: La primera, la “Formación” las cuales son las representaciones de un registro semiótico particular, la cual constituye un conjunto de marcas perceptibles e

[1] Texto original: “students may make virtually no connections between reference domains and symbols systems that we would expect them to think of as being nearly identical… the interplay occurs far more rarely than one would like”

identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado. La segunda, “Tratamiento”, las cuales son las transformaciones propias de cada registro, de acuerdo con unas únicas reglas que le son propias al sistema, de modo que a partir de éstas se obtengan otras representaciones que puedan constituirse como una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. La tercera, “Conversión”, como aquella habilidad para el cambio de registro de representación semiótica, el poder convertir las representaciones producidas de un sistema de representación a otro sistema, de manera que este otro sistema permita explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado.

Un ejemplo de conversión y tratamiento, se da en el siguiente cuadro en cuanto a transformaciones de representaciones semióticas:

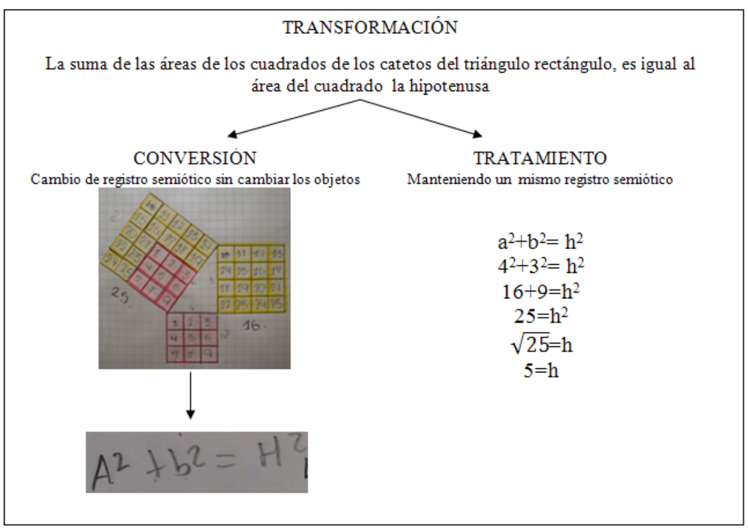


Figura 3. Transformación de representaciones semióticas.

Tomado de los datos recolectados.

El lenguaje natural, como el lenguaje simbólico, las figuras geométricas, los gráficos, los esquemas, las imágenes, permiten involucrar estas tres actividades cognitivas que están ligadas a la semiosis.

En el análisis de desarrollo de pensamiento y los problemas de aprendizaje de las matemáticas, el trabajo realizado por Duval, plantea tres fenómenos, que se encuentran muy relacionados entre sí, los cuales se refieren a:

a) Diversificación de los registros de representación semiótica: Ya que los diferentes sistemas de representación son muy diferentes entre sí y cada uno de ellos plantea preguntas sobre el aprendizaje.
b) Diferenciación entre representante y representado: También entre forma y contenido de una representación semiótica. Diferenciación que está asociada a la comprensión de lo que representa una representación y la posibilidad de asociar otras representaciones e integrarlas a los procedimientos de tratamiento.
c) Coordinación de diversos registros de representación: El cual se refiere no solo a conocer las reglas de correspondencia entre dos sistemas semióticos diferentes, sino los fenómenos de congruencia entre las representaciones producidas en los diferentes sistemas.

Según Duval (2006), las representaciones semióticas son conscientes y externas, que permiten mirar el objeto a través de la percepción de estímulos, ya sea puntos, trazos, caracteres…y que tienen un valor de significantes. Las representaciones mentales son las que permiten mirar el objeto en la ausencia total del significante perceptible, en donde se incorporan los conceptos, las nociones, las ideas, como también las creencias. En síntesis, todas aquellas proyecciones que reflejan los conocimientos, los valores que un individuo comparte con su alrededor.

A la luz de la teoría expuesta, esta investigación centró su interés en el tratamiento y conversión del objeto matemático, organizando así nuevas propuestas didácticas.

La enseñanza ha privilegiado procesos que tienen que ver con la formación y tratamiento de representaciones semióticas, y no con la conversión. Estando de acuerdo con Duval (2004) quien afirma que: "Lo que se observa de manera más protuberante es que el lugar dado a la conversión de las representaciones de un registro a otro es mínimo si no nulo". (p. 48). Así como los resultados de otras investigaciones planteadas por el autor, la conversión de representaciones semióticas son los procesos cognitivos más difíciles de adquirir para la mayoría de los alumnos.

<u>Conversión de Representaciones</u>: "La conversión requiere que se perciba la diferencia entre lo que Frege llamaba el sentido y la referencia de los símbolos o de los signos, o entre el contenido de una representación y lo que ésta representa" (Duval, 2006,p.46), ya que si no se percibe esta diferencia la conversión resulta imposible o incomprensible.

En la conversión de un registro a otro para representar un mismo objeto, se utilizan operaciones habitualmente designadas por términos de transposición, traducción, ilustración, interpretación, codificación. Una transformación de un registro de representación de partida que a veces puesta en correspondencia con otro registro de representación, hace que se seleccione el contenido de la representación de partida y la reorganización de sus elementos. Proceso que siempre revela un salto cognitivo, pues no existen reglas ni asociaciones básicas para esta transformación.

La conversión es la que permite la articulación entre los registros de representación en la enseñanza, son el resultado de la comprensión conceptual y cualquier dificultad que se presente, indica conceptos erróneos. Según Duval (2006): "es el primer umbral de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas". (p. 166)

Duval (2004) plantea que generalmente los procesos de conversión entre registros de representación diferentes, es espontánea para los estudiantes cuando dichos registros son congruentes. Para ello debe cumplir tres condiciones:

- Correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen
- Igual orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones
- Univocidad semántica terminal, a cada una unidad significante en la representación de partida en una sólo unidad significante en la representación de llegada.

En la medida que existan condiciones de congruencia entre los diferentes registros de representación, podría decirse habría mejores procesos de comprensión en el aprendizaje del concepto matemático.

2.2.3 El Teorema

El objeto matemático, que motivó esta investigación, teorema de Pitágoras, es quizás uno de los más famosos y como teorema el que más demostraciones conocidas tiene. Strathern (1999) afirma: “existen cerca de 400 pruebas conocidas del teorema de Pitágoras, más que para cualquier otro teorema”. (p. 84)

Para efectos de su enseñanza y aprendizaje, este teorema se considera base para la comprensión de otros conceptos propios de las matemáticas, que tienen que ver con el álgebra, la trigonometría, la geometría analítica, como son el deducir la ecuación de la circunferencia, la distancia entre dos puntos en un plano coordenado, la definición de los números irracionales, entre otros que tienen que ver con su aplicabilidad.

A continuación se hace una breve descripción de este teorema con algunas de sus demostraciones:

El gran descubrimiento de la escuela pitagórica o del propio Pitágoras fue la demostración que el cuadrado la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:

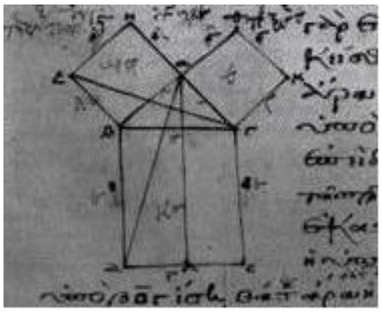


Figura 4 . Teorema de Pitágoras.

Tomado de sitio web: http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Biografias/12-1-b-pitagoras.html

Pero el misterio que rodeaba la comunidad pitagórica hizo imposible que esta demostración llegara a nuestro conocimiento. Aunque se puede deducir que no sería muy distinta a la que Euclides proporciona en los Elementos.

Euclides, reconocido como el padre de la geometría, autor de importantes obras como los Elementos, proporciona una prueba del teorema de Pitágoras en su libro I, proposición 47, que dice:

En triángulos rectángulos, el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto, es igual a la suma de los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.

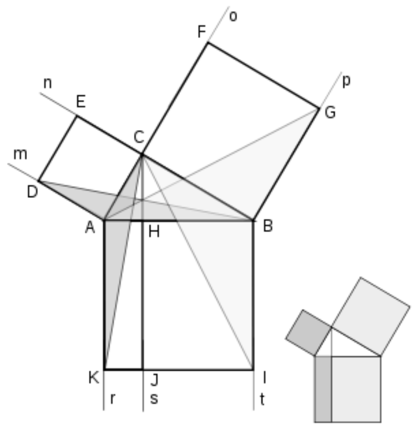


Figura 5. Demostración Teorema de Pitágoras

Tomado de Los Elementos de Euclides, Copyfreedom online de

http://www.euclides.org/menu/elements_esp/01/proposicioneslibro1.htm

Esta prueba que da Euclides, consiste en demostrar la igualdad de las áreas representadas del mismo color.

La demostración se hace a partir de la proposición I. 41:

Si un paralelogramo y un triángulo tienen la misma base, y están comprendidos entre las mismas paralelas, entonces el área del paralelogramo es doble de la del triángulo.

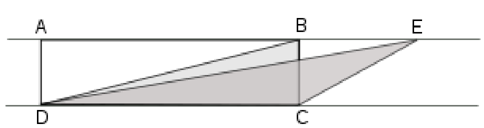


Figura 6. Proposición I: 41 Elementos de Euclides

Tomado de Los Elementos de Euclides, Copyfreedom online de

http://www.euclides.org/menu/elements_esp/01/proposicioneslibro1.htm

Tenemos el triángulo ABC, (Ver figura 5), rectángulo en C, y construimos los cuadrados correspondientes a catetos e hipotenusa. La altura CH se prolonga hasta J. Seguidamente se traza n cuatro triángulos, congruentes dos a dos:

- Triángulos ACK y ABD: son iguales, pues siendo AD ≅AC, y AK≅AB, necesariamente BD≅CK. Sus tres lados son iguales.
- Triángulos ABG y CBI: análogamente, AB≅BI, y BG≅BC, así que AG≅CI. Sus tres lados son asimismo iguales.

En las anteriores consideraciones, nótese que un giro con centro en A, y sentido positivo, transforma ACK en ABD. Y un giro con centro en B, y sentido también positivo, transforma ABG en CBI.

Veamos seguidamente que:

1. Las paralelas r y s comprenden al triángulo ACK y el rectángulo AHJK, los cuales tienen la misma base, AK. Por tanto de acuerdo con la proposición I.47 AHJK tiene doble área que ACK.
2. Las paralelas m y n contienen a ABD y ADEC, cuya base común es AD. Así que el área de ADEC es doble de la de ABD.

Pero siendo ACK=ABD, resulta que el rectángulo AHJK y el cuadrado ADEC tienen áreas equivalentes. Haciendo razonamientos similares con los triángulos ABG y CBI, respecto al cuadrado BCFG y al rectángulo HBIJ respectivamente, concluimos que éstos últimos tienen áreas asimismo iguales. A partir de aquí, es inmediato que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Más adelante, Euclides en el libro VI muestra la proposición 31, que dice:

En los triángulos rectángulos, la figura construida a partir del lado que subtiende el ángulo recto es igual a las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de los lados que comprenden el ángulo recto.

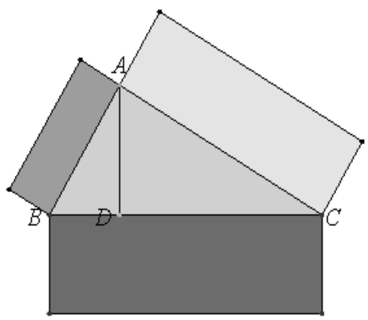


Figura 7. Demostración 1 Teorema de Pitágoras

Tomado de Strathern, P. 1999, p.81

Que podría entenderse, como la versión generalizada del Teorema de Pitágoras.

En Choupeisuanching, considerado como uno de los documentos más antiguos de los clásicos matemáticos chinos, que data aproximadamente entre el 500 a.C. y el nacimiento de Cristo, incluye una prueba de este teorema. "La versión simplificada de esta prueba china es la que más belleza encierra" (Strathern, 1999):

Un cuadrado con lados a+b encierra un cuadrado con lados h en su interior

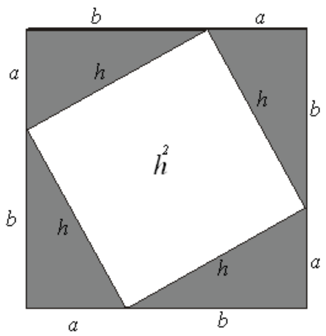


Figura 8. Demostración 2. Teorema de Pitágoras

Tomado de Strathern, P. 1999, p.84

Esta prueba implica equiparar el área total a las áreas del cuadrado interior y los cuatro triángulos, resultando la ecuación:

$$(a+b)^2 = 4(1/2ab) + h^2$$

Lo cual puede algebraicamente, simplificarse como :

$$a^2+b^2=h^2.$$

Geométricamente también puede visualizarse así:

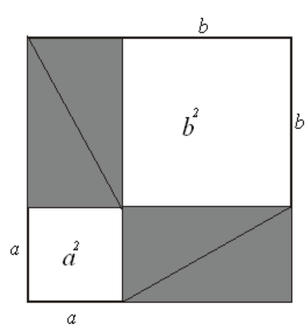


Figura 9. Continuación Demostración 2 Teorema de Pitágoras

Tomado de Strathern, P. 1999

Los dos cuadrados expuestos en las figuras anteriores tienen las mismas dimensiones $(a+b)\times(a+b)$ así que también tienen la misma área $(a+b)^2$. Si a estos dos cuadrados les quitamos la misma porción de área, las figuras resultantes también tendrán la misma área. Así que en el primer cuadrado hemos sombreado la parte que le vamos a quitar, que son cuatro triángulos iguales, y se ve claramente que el área resultante es h^2, ya que la figura que nos ha quedado es un cuadrado de lado h. Para el segundo cuadrado también hemos quitado los cuatro triángulos iguales, no obstante ahora los hemos quitado en una distribución distinta, y nos ha quedado dos cuadrados uno de lado a y otro de lado b, así que el área de la figura resultante es a^2+b^2.

DISEÑO METODOLÓGICO

El tipo de investigación es cualitativa, pretende el reconocimiento de los procesos de tratamiento y conversión de representaciones semióticas que dan cuenta del proceso de aprendizaje del concepto Teorema de Pitágoras en un grupo de estudiantes que cursan grado séptimo.

Es una investigación didáctica que estudia un fenómeno social dentro de un contexto educativo, basado en una intervención docente, en donde se utilizó la descripción de hechos en la búsqueda de generación de conocimiento y entendimiento de las representaciones semióticas a través del tratamiento y conversión que dan cuenta del proceso de aprendizaje del objeto matemático propuesto.

Para Anselm Strauss y Juliet Corbin (2002), la investigación cualitativa es aquella que produce hallazgos, a donde no se llega por métodos estadísticos u otros medios de cuantificación:

> Al hablar sobre análisis cualitativo, nos referimos, no a la cuantificación de los datos cualitativos, sino al proceso no matemático de interpretación, realizado con el propósito

de descubrir conceptos y relaciones en los datos brutos y luego organizarlos en un esquema explicativo teórico. (p. 20)

Teniendo en cuenta que la investigación cualitativa se define en diversas metodologías, el análisis se suscribe en la teoría fundamentada, la cual desarrolla teoría basada en datos empíricos y se aplica a áreas específicas.

Glaser y Strauss (1967) citado por (Hernandez Sampieri, Fernández-Collado, & Baptista Lucio, 2006), denominan esta teoría, como teoría sustantiva o de rango medio. Son de naturaleza local, pues se relacionan con una situación y un contexto particular, aportando nuevas visiones al fenómeno estudiado. Es así, en este caso, que la teoría sustantiva que se derive de los datos de la investigación, deberán ser validadas por teorías formales, las cuales son consideradas de un rango mayor y que tienen que ver con el análisis teórico y la construcción de hipótesis. (p. 687)

Es por ello, que esta investigación se apoya en su análisis teórico desde un enfoque semiótico en Duval (2004), en su análisis de tratamiento y conversión de tipos de representación semiótica.

Estando de acuerdo con D'amore (2004) :

> Todo concepto matemático se ve obligado a servirse de representaciones, dado que no se dispone de "objetos" para exhibir en su lugar; por lo que la conceptualización debe necesariamente pasar a través de registros representativos que, por varios motivos, sobre todo si son de carácter lingüístico, no pueden ser unívocos. (p.5).

Es así donde los registros de representación semiótica, se convierten en una herramienta fundamental para promover la construcción de los conceptos matemáticos.

3.1 Diseño

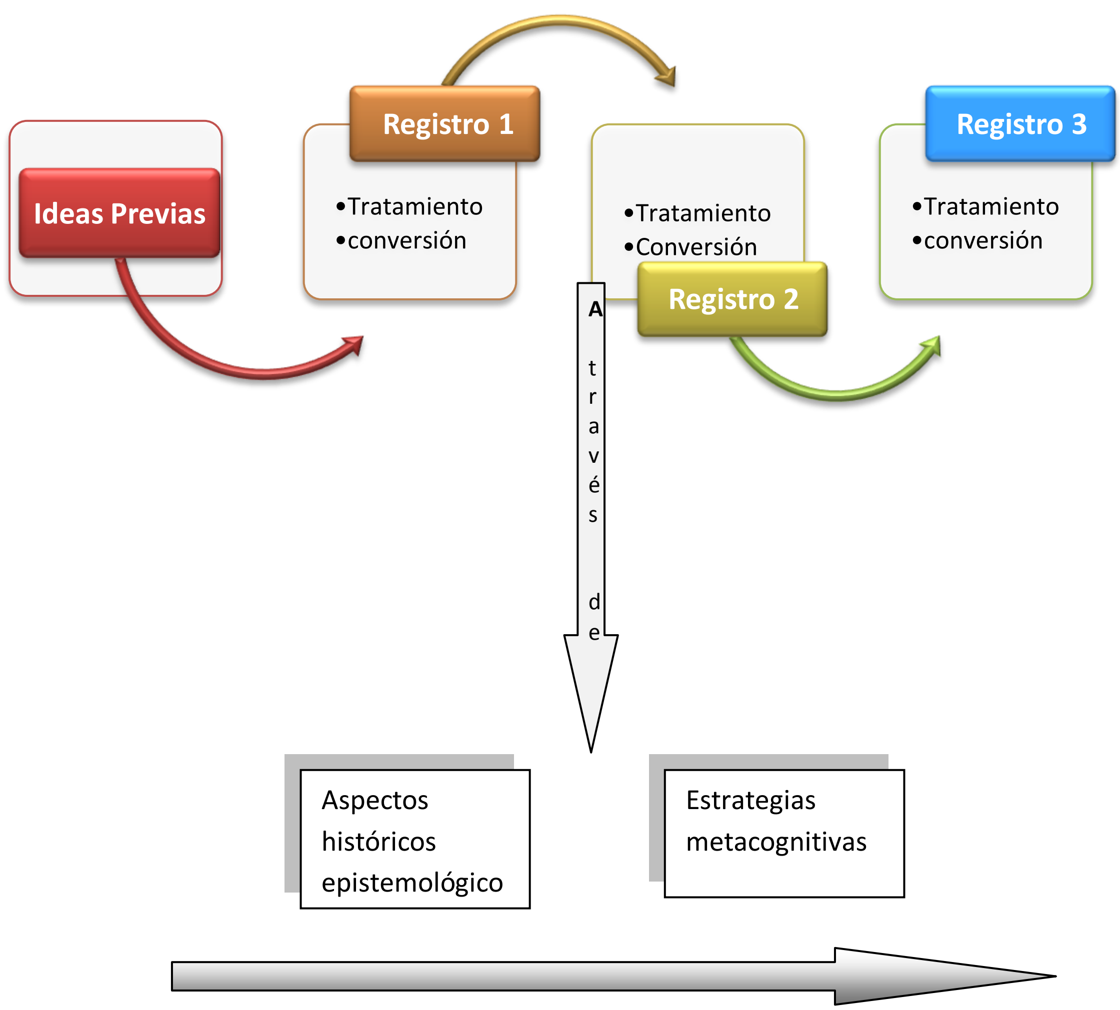


Figura 10. Diseño de la investigación

DISEÑO Y DESARROLLO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

El diseño de esta investigación inicia en un primer momento con la exploración de ideas previas, con el fin de detectar los preconceptos que traen los estudiantes objeto de esta investigación. Estos preconceptos giran alrededor del Teorema de Pitágoras y se consideran prerrequisitos para su abordaje.

A partir de esta información se utiliza un instrumento de intervención en el aula (unidad didáctica), en donde se trabajan varios registros de representación semiótica, que involucra tratamiento en cada uno de ellos y conversión a otros registros de representación semiótica.

Considerando que el instrumento de unidad didáctica hace parte de un proceso de enseñanza y aprendizaje, allí se vinculan también otros aspectos, que hacen parte como valor agregado, y que se refieren a la vinculación de estrategias metacognitivas, aspectos históricos y epistemológicos.

3.2 Instrumentos y Técnicas de Recolección de Información

Todos los datos recogidos en esta investigación se ubicaron en un contexto de unidad didáctica, de acuerdo con el diseño, se emplearon dos instrumentos como fuentes de recolección primaria de información, el primero cuya pretensión fue indagar ideas previas y un segundo instrumento en donde se recolectó información dada en la intervención de aula. Para el primero se utilizaron técnicas de recolección de información de tipo cuestionario abierto y para el segundo, la observación, donde se realizó un registro fotográfico y fílmico de cada una de las clases, además se tomaron en cuenta los talleres y el auto informe incorporado en el mismo instrumento.

3.2.1 Exploración De Ideas previas

Este instrumento buscó indagar las ideas previas que traían los estudiantes sobre otros conceptos que se consideraron prerrequisitos para el abordaje del objeto matemático Teorema de Pitágoras.

Estos conceptos estaban relacionados con la noción de área, identificación de formas geométricas, concepto de ángulo y resolución de ecuaciones. (Anexo 1).

Este primer instrumento se utilizó con el fin de explorar las ideas previas del grupo de estudiantes y generar puntos de partida en la elaboración del segundo instrumento relacionadas con el de tratamiento y conversión de las representaciones semióticas dadas en el objeto matemático.

3.2.2 Intervención En Aula

Para efectos de esta investigación, la unidad didáctica sirvió como instrumento para explorar e indagar los procesos de intervención en el aula, en donde además de explorar ideas previas, permitió que se pudiera desarrollar el proceso de planificación en la enseñanza del objeto matemático, que encierra actividades de aula, en este caso pretendiendo que en su desarrollo los estudiantes realicen tratamiento y conversión de diferentes representaciones semióticas del objeto matemático, y que se vinculen otros aspectos importantes en la enseñanza como son las estrategias metacognitivas, aspectos históricos y epistemológicos; hacemos aquí una breve descripción de la metodología de la unidad planteada, la cual adopta la estructura de unidades didácticas planteadas por Jorba y Sanmartí (1994), ya que el ciclo de aprendizaje que proponen los autores se enmarca desde un modelo pedagógico con un enfoque constructivista.

El ciclo de aprendizaje plantea cuatro etapas: La primera etapa plantea actividades de exploración con el fin de detectar las ideas previas que traen los estudiantes, y a la vez detectar las dificultades y necesidades del estudiantado para abordar el aprendizaje de un nuevo conocimiento. La segunda etapa aborda actividades en donde se introducen los nuevos conocimientos, orientadas a favorecer que los estudiantes detecten nuevos puntos de vista en relación al tema de estudio, características que permitan definir los conceptos, donde identifique nuevas formas de interpretar los fenómenos y los modelice; llevándolos de forma progresiva a un aumento en el grado de complejidad y abstracción en relación a los modelos o representaciones planteadas inicialmente. La tercera etapa incluye actividades de estructuración, que busca el reconocimiento por parte del estudiantado de que el fenómeno funciona según unas reglas determinadas. La cuarta y última etapa, son las actividades de aplicación, en donde los estudiantes apliquen los conocimientos aprendidos en otros contextos o situaciones distintas. La unidad didáctica inicia desde una fase simple y concreta hasta avanzar a procesos más complejos y abstractos.

El siguiente gráfico muestra el diseño de la unidad didáctica con los componentes que plantea el ciclo de aprendizaje, proponiendo en cada una de sus actividades aspectos de tratamiento y conversión de representaciones semióticas del objeto matemático que motivó esta investigación.

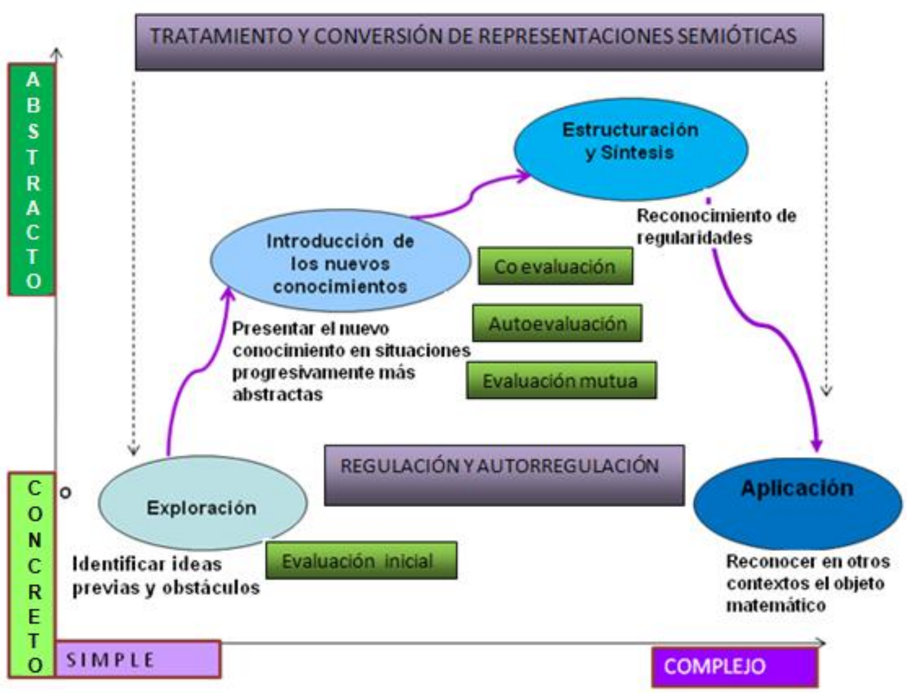


Figura 11. Estructura de la unidad didáctica

Adaptado por Luz Elena Osorio del Ciclo de Aprendizaje de Jorba y Sanmartí, 1994

Considerando en esta investigación la importancia de que el estudiante haga tratamiento y conversión de representaciones semióticas del objeto matemático, el instrumento de unidad didáctica buscó favorecer estas actividades cognitivas, a la vez que incorporó otros aspectos como valor agregado, en actividades que permitían la realización de regulación y autoregulación del aprendizaje y el trabajo cooperativo.

A continuación se describen las siete actividades incorporadas en el instrumento, entrelazadas una con otra, secuenciando el proceso de aprendizaje y facilitando los procesos de tratamiento y conversión. Cada una de las actividades tuvo destinado un tiempo para llevarse a cabo, buscando que los estudiantes dedicaran el tiempo al desarrollo de la actividad y en su mayoría planteó actividades a desarrollar en pequeños grupos, ya que el trabajo cooperativo aporta a que los estudiantes desarrollen destrezas sociales cooperativas y el interés en la colaboración, más que generar competencia entre los estudiantes.

Las actividades fueron clasificadas según el Ciclo del Aprendizaje planteado anteriormente:

Fase de exploración:

Actividad 1 Situa al estudiante en la temática de estudio, teniendo en cuenta algunos aspectos históricos, además que pide al grupo se fijen objetivos de aprendizaje.

Fase de introducción de nuevos conocimientos:

Actividad 2 Busca que los estudiantes construyan el triángulo rectángulo, manipulando y reconociendo las carácterísticas de esta forma geométrica, considerando que el Teorema de Pitágoras sólo tiene aplicabilidad en triángulos rectángulos. Allí se plantea un instrumento de reflexión metacognitiva dirigidas hacia el proceso y otras que requieren precisión y exactitud utilizando la ayuda externa de sus compañeros, ya que pequeños errores en su construcción no permitan visualizar la congruencia entre las áreas.

Actividad 3 Propone un espacio a la etimología del lenguage matemático que entra a hacer parte del vocabulario del estudiantado, ya que ésta busca acercarlo a su vocabulario común, entendiendo su significado y facilitándo su comprensión. Luego se continúa a la elaboración de los cuadrados con las medidas de los lados del triángulo y a la comparación de éstas áreas, promoviendo el descubrimiento de este principio matemático en su representación geométrica. (Se recomienda que quienes tienen más difucultad, los construyan con papel milimetrado y quienes no, sólo utilicen su regla y transportador como herramienta).

Fase de estructuración o síntesis:

Actividad 4 Se realiza a nivel individual, teniendo en cuenta que ya se realizó un ejercicio a nivel grupal, con el fin de visualizar el trabajo de cada uno de los estudiantes y vincular además el uso de otras medidas dadas por los mismos estudiantes, con el fin de que se promoviera el cálculo con números decimales, y que puedieran visualizar el modelo con otros números diferentes a las ternas pitágoricas planteadas al inicio del ejercicio.

Una vez construido, el estudiante realiza comparaciones con las áreas calculadas, como en el ejercicio anterior.

Actividad 5 Los estudiantes en sus pequeños grupos, hacen una recolección de datos de áreas de cuadrados de catetos e hipotenusas de diferentes triángulos, calculadas por diferentes grupos, como también las calculadas individualmente. Realizando nuevamente comparaciones, hallando regularidades, identificando y verbalizando el objeto matemático.

En este momento, es importante la intervención del profesor, para recoger las conclusiones halladas por el estudiantado, retomarlo como Teorema y así ir construyendo el concepto, con otras representaciones como la algebraica.

Actividad 6 Plantea trabajar la bidimensionalidad de uno de los registros inicialmente trabajados para el paso a una sóla dimensión y facilitación de su reconocimiento en otros registros de representación.

Fase de aplicación:

Actividad 7 Plantea dos problemas a resolver, utilizando los conocimientos adquiridos sobre el Teorema de Pitágorras, buscando que los estudiantes reconozcan el objeto matemático en otros contextos y su aplicabiliad.

3.3 Procedimiento

El proyecto de investigación, a través del instrumento de unidad didáctica, que involucró la identificación de ideas previas de los estudiantes y la intervención en el aula propuesta, planteó una matriz de análisis teórico para el reconocimiento de las actividades cognitivas (de tratamiento y conversión). A partir de esta matriz, se realiza una descripción de las actividades cognitivas dadas por los estudiantes objeto de esta investigación y seguidamente se realiza un análisis interpretativo de confrontación de datos y teoría alrededor del tratamiento y la conversión de las representaciones semióticas del Teorema de Pitágoras. Finalmente se realiza un análisis comprensivo alrededor del aprendizaje del objeto matemático.

La intervención se realizó a un grupo natural de estudiantes, con edades que oscilan entre 11 y 13 años, que cursan grado séptimo, de la Institución Educativa Santo Domingo Savio del municipio de Balboa departamento de Risaralda. Para efectos de la investigación, el análisis se hizo a nueve (09) estudiantes.

3.3.1 Plan de Análisis

Ubicados dentro de un contexto de unidad didáctica, el análisis de la información de acuerdo con la recolección de los datos se planteó de la siguiente manera:

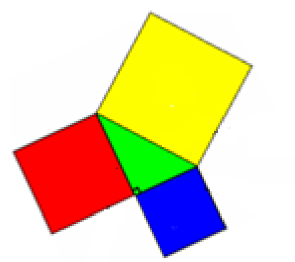
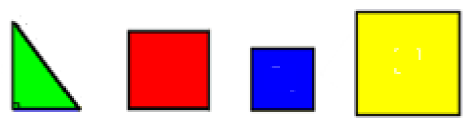
Instrumento de Exploración de Ideas previas: Se realizó una descripción de los principales hallazgos encontrados en el instrumento, que sirvieron de base en la construcción del segundo instrumento.

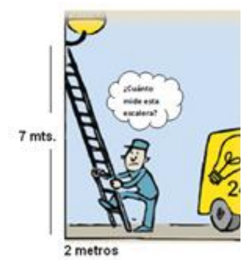
Instrumento de Intervención en el Aula: Como ejercicio teórico en la consolidación de los datos, se planteó una matriz de análisis como directriz en la organización de los datos recogidos, orientados a detectar los procesos de tratamiento y conversión del objeto matemático, realizados por los estudiantes.

Según la teoría, Duval (2004) plantea que los registros de representación utilizados en matemáticas se clasifican en plurifuncionales, monofuncionales, discursivos y no discursivos. Se puede afirmar que registros plurifuncionales permiten tratamientos que no son algoritmizables, mientras en los registros monofuncionales si. En relación a los registros discursivos plantea que "permiten describir, inferir, razonar, calcular, mientras que los registros no discursivos permiten visualizar lo que nunca es dado de manera visible". (Duval, 2004, p. 51).

De acuerdo con lo anterior, las figuras geométricas se inscriben dentro de los registros plurifuncionales no discursivos, en registros plurifuncionales discursivos la lengua natural, y en registros monofuncionales discursivos aquellos que tienen que ver con escritura algebraica.

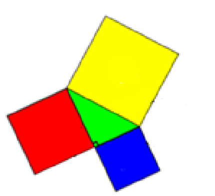
Considerando que esta investigación se basa en la teoría de Raymond Duval y centra su interés en el estudio de registros de representación semiótica del Teorema de Pitágoras, en aspectos relacionados con el **tratamiento** de aquellas transformaciones que van desde una representación inicial a otra terminal en un mismo registro de representación semiótica y aspectos de **conversión** que involucran fenómenos de congruencia entre diferentes registros de representación de un mismo objeto matemático, con el fin de mejorar el aprendizaje, estamos de acuerdo con el autor cuando plantea que "El cambio de registro constituye una variable fundamental en didáctica: facilita considerablemente el aprendizaje pues ofrece procedimientos de interpretación" (Duval, 2004.p.62). Es por ello que el plan de análisis propone el estudio de aspectos que tienen que ver con el tratamiento de cada representación y la conversión entre un registro y otro, que realizaron los estudiantes objeto de esta investigación alrededor del concepto Teorema de Pitágoras. Para ello se realiza la descomposición de cada una de estas representaciones en sus unidades significantes:

Tipos de representaciones		**Registros representacionales**	**Tratamiento de la representación**	**Indicadores**	**Unidades significantes**
Plurifuncionales	**No discursivos**	Lenguaje Geométrico	TRATAMIENTO FIGURAL Aprehensión perceptiva Aprehensión operativa de reconfiguración	- Comparación de áreas por pavimentación de superficie - Comparación de áreas por conteo de unidades cuadradas -Comparación de áreas aplicando la fórmula	  Intervienen cuatro unidades significantes, representadas en dos formas geométricas: -*El triángulo rectángulo:* Polígono de tres lados, donde uno de sus ángulos es recto (mide 90°) -*Cuadrado* : Polígono de 4 lados de igual longitud y 4 ángulos rectos.
	Discursivos	Lenguaje Verbal	APREHENSIÓN DISCURSIVA Deducción Razonamiento	Elaboración de conclusiones después de realizar comparaciones de las áreas de los cuadrados de	Acercamiento al concepto: "En el triángulo rectángulo, el área de los cuadrados de los catetos es igual al área del cuadrado de la hipotenusa" Intervienen cuatro unidades significantes: El trángulo rectángulo El área del cuadrado del cateto 1

				los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo.	El área del cuadrado del cateto 2 El área del cuadrado de la hipotenusa.
		Lenguaje Natural	APREHENSIÓN DISCURSIVA Deducción Análisis Descripción Argumentación Establecimiento de relaciones	-Identificación de formas geométricas como el triángulo rectángulo en otros contextos. -Relación de los lados de triángulo rectángulo (catetos e hipotenusa) con otros elementos del contexto. -Descripción de procesos a seguir y cálculo de la medida de un lado desconocido del triángulo rectángulo, conociendo los otros dos lados	En este registro se estudian dos situaciones que pueden ser modeladas utilizando el concepto Teorema de Pitágoras Esta representación se relaciona con algunas de las aplicaciones del concepto y la interpretación de situaciones del mundo real. Dentro del instrumento de unidad didáctica se presenta a los estudiantes dos situaciones tipo problema donde se les pide si es posible conocer las medidas del TV y de la escalera. Situación 1. Situación 2.  Intervienen cuatro unidades significantes: El trángulo rectángulo formado y la relación entre sus tres lados

Monofuncionales	**Discursivos**	Lenguaje Algebraico	TRATAMIENTO SIMBÓLICO	-Identificación de variables -Identificación del área del cuadrado por fórmula -Raíz cuadrada -Cálculo de la medida un lado desconocido del triángulo rectángulo, conociendo los otros dos lados por reemplazo de variables y procesos aritméticos.	$a^2 + b^2 = c^2$ Intervienen como unidades significantes los cuadrados de los lados de los catetos y el cuadrado del lado de la hipotenusa

Conversión de una representación a otra

Transición de un registro representacional a otro	Unidades Significantes	Correspondencia semántica	Univocidad semántica terminal	Conservación del orden
Registro de partida 	Triángulo rectángulo Cuadrado de cateto 1 Cuadrado de cateto 2 Cuadrado de hipotenusa	SI	SI	SI
Registro de llegada En el <u>triángulo rectángulo</u>, el <u>área de los cuadrados de los catetos</u> es igual al <u>área del cuadrado de la hipotenusa</u>	Triángulo rectángulo Área del cuadrado del cateto 1 Área del cuadrado del cateto 2 El área del cuadrado de la hipotenusa			

<table>
<tr>
<td>Registro de partida

En el triángulo rectángulo, el área de los cuadrados de los catetos es igual al área del cuadrado de la hipotenusa</td>
<td>Triángulo rectángulo

Área del cuadrado del cateto 1

Área del cuadrado del cateto 2

El área del cuadrado de la hipotenusa</td>
<td rowspan="2">SI

Aquí se debe hacer referencia que representan a, b y c, como catetos e hipotenusa y como variables del triángulo rectángulo.</td>
<td rowspan="2">NO

Ausencia de una unidad significante. La que se refiere al triángulo rectángulo. Aunque puede evidenciarse de manera implícita cuando hace referencia a catetos e hipotenusa</td>
<td rowspan="2">SI</td>
</tr>
<tr>
<td>Registro de llegada

$a^2 + b^2 = c^2$</td>
<td>Cuadrado del cateto 1 (a)

Cuadrado del cateto 2 (b)

Cuadrado de la hipotenusa (c)

En su representación simbólica (Fórmula del área del cuadrado)</td>
</tr>
<tr>
<td>Registro de partida

$a^2 + b^2 = c^2$</td>
<td>Área del cuadrado del cateto 1 (a)

Área del cuadrado del cateto 2 (b)

El área del cuadrado de la hipotenusa (c)

En su representación simbólica (Fórmula de área del cuadrado)</td>
<td rowspan="2">SI

Aquí las variables se convierten en constantes</td>
<td rowspan="2">NO

Ausencia de una unidad significante en el registro de partida. La que se refiere al triángulo rectángulo</td>
<td rowspan="2">SI</td>
</tr>
<tr>
<td>Registros de llegada

Situación 1</td>
<td>Triángulo rectángulo formado

Altura del muro cateto 1 (a)

Distancia del muro al pie de la escalera
cateto 2 (b)

Largo de la escalera
hipotenusa (c)</td>
</tr>
</table>

Situación 2	Triángulo rectángulo formado Altura de TV cateto 1 (a) Ancho del TV cateto 2 (b) Diagonal hipotenusa (c)			

ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

4.1 Análisis Descriptivo

De acuerdo con la información recogida, se hace necesario hacer una primera descripción de los hallazgos en el instrumento de exploración de ideas previas, que permitieron visualizar aspectos relacionados con el objeto matemático de estudio, y que sirvieron de base para poder abordar en una segunda parte los aspectos relacionados con el tratamiento y la conversión de las representaciones semióticas en el aprendizaje del Teorema de Pitágoras.

4.1.1 Principales Hallazgos Instrumento De Ideas Previas

El instrumento de ideas previas permitió indagar aquellas ideas que los estudiantes traían sobre conceptos matemáticos que se consideran prerrequisitos para abordar el objeto matemático de esta investigación. (Anexo 1).

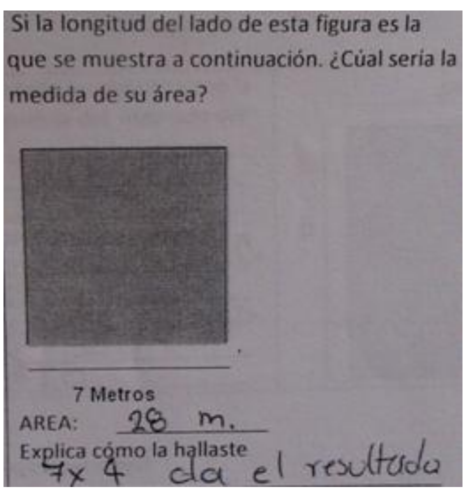
Es de anotar que se hace una descripción de los hallazgos, sin hacer un estudio en profundidad sobre ellos, pues aunque se considera de especial importancia se conozcan las ideas previas del estudiante como punto de partida para adaptar la enseñanza, lo que interesa a esta investigación es lo que tiene que ver con el tratamiento y la conversión del objeto matemático Teorema de Pitágoras.

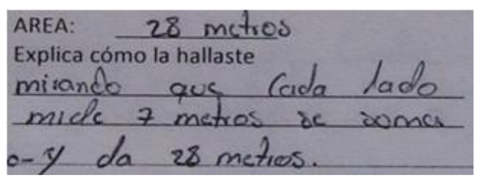
A continuación se hace una descripción de los hallazgos, cuando se indagó sobre aspectos relacionados con la noción de área e identificación de figuras geométricas:

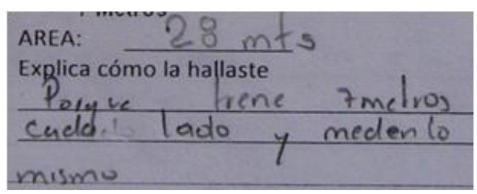
4.1.1.1 Noción de Área

Distinción de conceptos de área y perímetro

Al indagar sobre el concepto de área, con frecuencia los estudiantes lo distinguían como el perímetro de la forma geométrica:

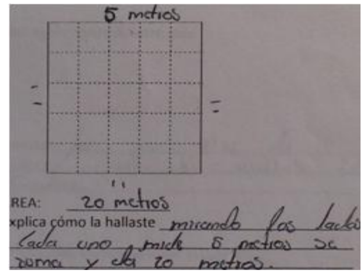




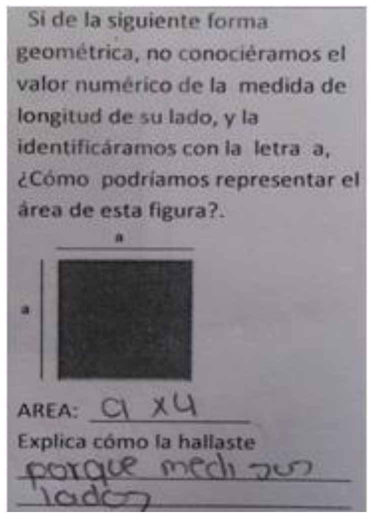


Respuestas de estudiantes al preguntárseles por el área de cuadrado.

Se evidencian este tipo de respuestas, aún cuando se mostraba la figura en unidades cuadradas



Una vez más refuerzan este concepto cuando lo representan de manera aún más general.

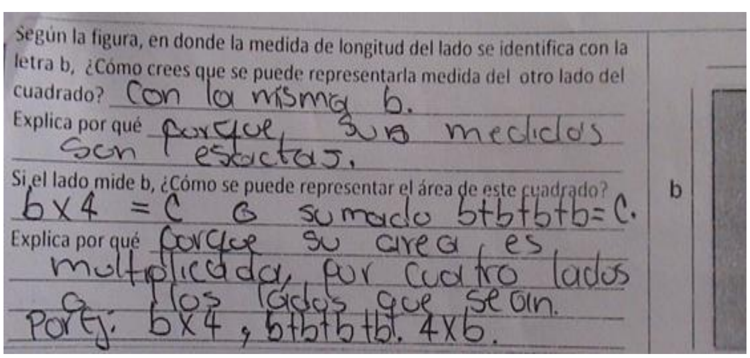

Si de la siguiente forma geométrica, no conociéramos el valor numérico de la medida de longitud de su lado, y la identificáramos con la letra a, ¿Cómo podríamos representar el área de esta figura?.

a

a

AREA: a x 4

Explica cómo la hallaste porque medi sus lados


Según la figura, en donde la medida de longitud del lado se identifica con la letra b, ¿Cómo crees que se puede representarla medida del otro lado del cuadrado? Con la misma b.

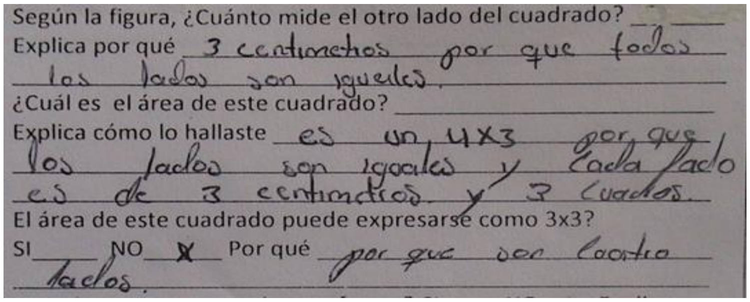
Explica por qué porque sus medidas son exactas.

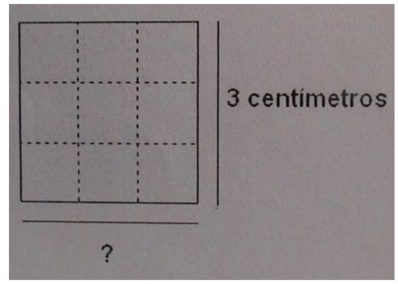
Si el lado mide b, ¿Cómo se puede representar el área de este cuadrado? b x 4 = c o sumado b+b+b+b= c.

Explica por qué porque su area es multiplicada por cuatro lados o los lados que sean. Por Ej: b x 4 , b+b+b+b. 4 x b.

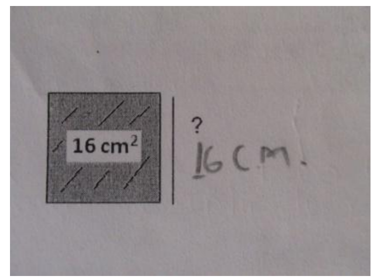
b

Aunque el estudiante tiene claro que las medidas de los lados de un cuadrado son las mismas, el concepto de área lo relaciona con su perímetro.


Según la figura, ¿Cuánto mide el otro lado del cuadrado? ____
Explica por qué 3 centimetros por que todos los lados son iguales.
¿Cuál es el área de este cuadrado? ____
Explica cómo lo hallaste es un 4x3 por que los lados son iguales y cada lado es de 3 centimetros y 3 cuadros.
El área de este cuadrado puede expresarse como 3x3?
SI____ NO X Por qué por que son cuatro lados.



De manera inversa, se les presentó el área del cuadrado, en donde, con frecuencia la relacionaron directamente con el lado.



Es pertinente considerar otras investigaciones que han indagado sobre este aspecto, las cuales muestran que un alto porcentaje de niños entre los doce y trece años, confunden área y perímetro, incluso en edades más avanzadas.

Al respecto, sobre la relación que establecen los estudiantes de perímetro y área, Dickson (1991) plantea que:

> … ha ido quedando de manifiesto que los niños y los no tan niños confunden frecuentemente área y perímetro. Por desgracia, sus primeros encuentros estructurados con estos conceptos suelen producirse en el contexto de la medida y, no pocas veces, acompañados de fórmulas. Es muy posible que los alumnos no dispongan de oportunidades

> suficientes para la exploración práctica de los fundamentos espaciales de estas dos ideas y de las relaciones que las ligan. (p.124)

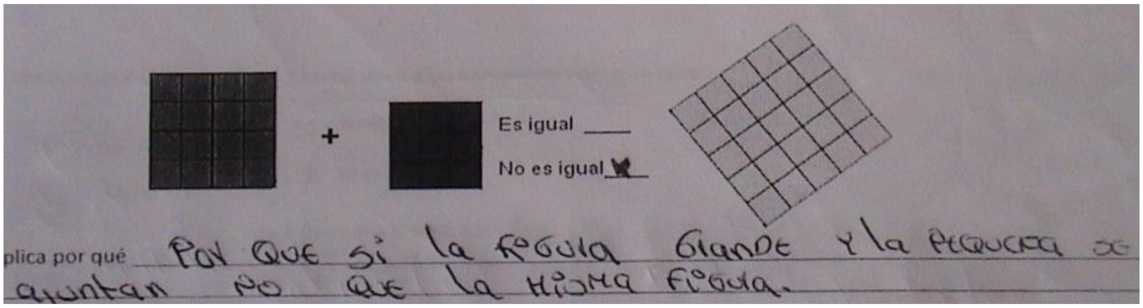
Es de considerar además que es posible que estas situaciones se refuerzan desde la misma escuela, cuando se presentan a los estudiantes las figuras dibujadas, haciendo identificar en ellos, la superficie con el borde o cuando en una enseñanza tradicional no se permite mucho el uso de los sentidos, donde se involucre la exploración y la manipulación de formas geométricas.

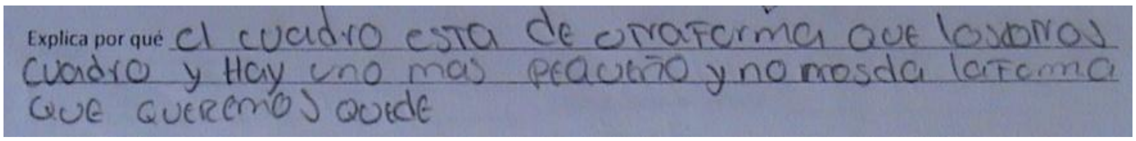
Para lo anterior, se considera se tomen en cuenta algunas recomendaciones y actividades propuestas por el autor Del Olmo Moreno, y Gil (1993) para que los estudiantes puedan distinguir las diferencias entre estos conceptos, ya que de no tenerse claros, podrían generar ciertas dificultades en el momento de abordar el objeto matemático Teorema de Pitágoras.

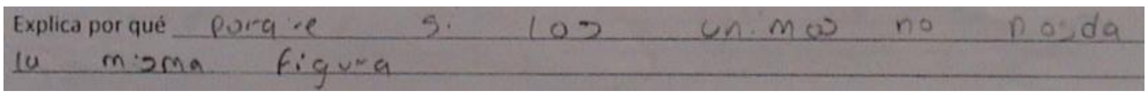
Equivalencia entre áreas

Sobre la noción de equivalencia de superficies, se encontraron algunos elementos que se relacionan a continuación:

Cuando se les indagó a los jóvenes si la superficie que ocupaban las dos primeras formas, correspondían o no a la tercera, plantearon respuestas como estas:



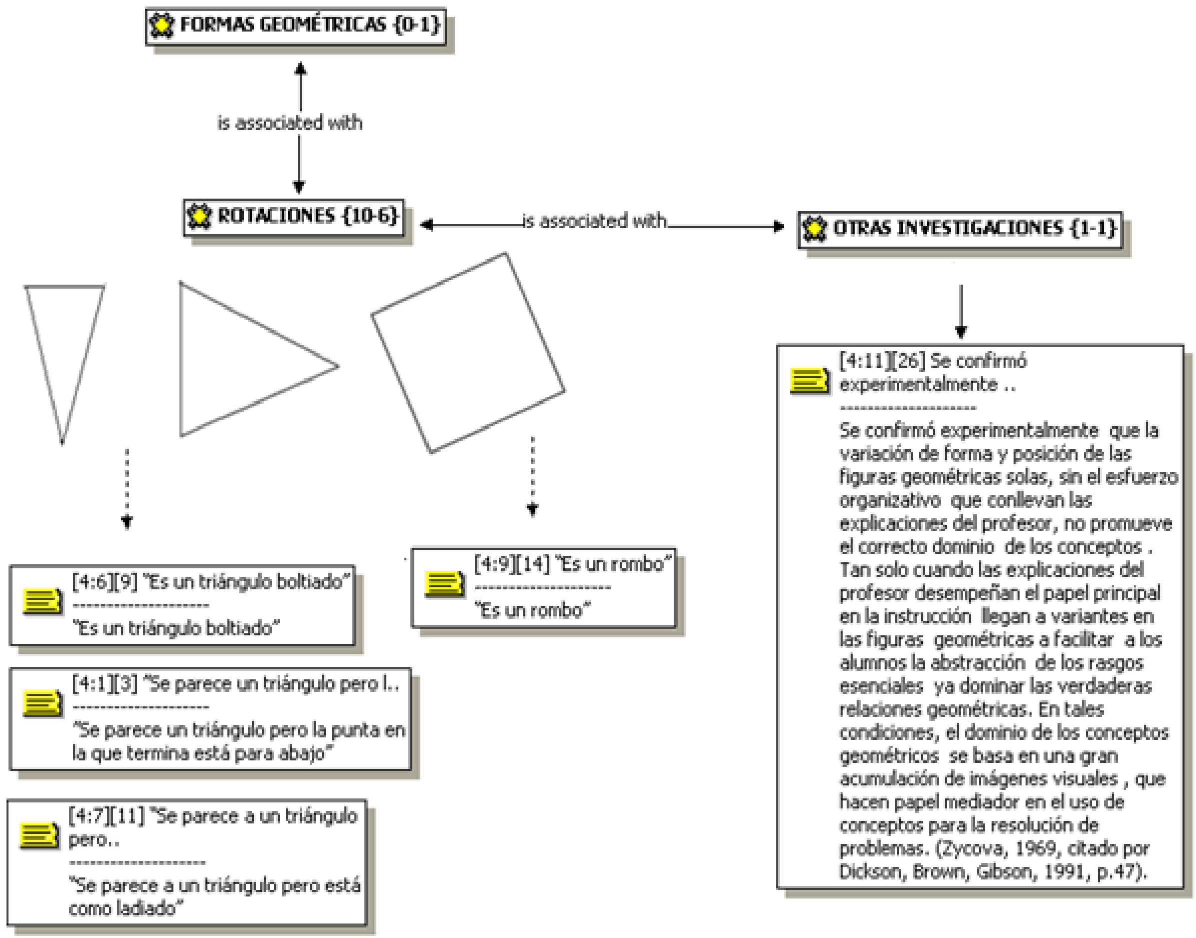




En los datos se confirma, como en otras investigaciones (Hutton 1978, Hart 198, citado en Dickson, 1991), con jóvenes de edades similares, que parecen no hacer corresponder las superficies porque varían las formas geométricas. Una vez más se confirma la necesidad que existe de que en los procesos de enseñanza, a los estudiantes se les brinde las herramientas suficientes en la construcción de los conceptos.

4.1.1.2 Identificación de formas geométricas

En la exploración de ideas previas de formas geométricas, se pudo evidenciar en los estudiantes, en el reconocimiento de algunas formas geométricas, algunos elementos relacionados con la rotación de las mismas. Este análisis se realiza a través de ATLAS TI:



Se verifica con frecuencia en las respuestas de los estudiantes que reflejan conceptos erróneos que a lo mejor podrían deberse a una enseñanza inadecuada, creyendo que cuando una forma geométrica cambia de posición, sus características también lo hacen o pierden sus características (utilizan expresiones como volteado, torcido, o donde un cuadrado en una rotación cambia a una forma de rombo), lo cual significa que no hay dominio del concepto de reconocimiento de algunas figuras geométricas y por lo tanto su no reconocimiento en otros contextos.

Dado lo anterior, se hace necesario que los estudiantes realicen actividades que vayan de lo concreto, acompañado de recorte, exploración y manipulación de formas geométricas, que permitan el reconocimiento de la equivalencia de superficies en diferentes contextos.

4.1.2 Aspectos Relacionados con el Tratamiento y la Conversión de Representaciones Semióticas del Teorema de Pitágoras

La aplicación del instrumento de aprendizaje del objeto matemático (Anexo 2), se abordó inicialmente desde un registro semiótico geométrico, con las siguientes consideraciones:

- Se tuvieron en cuenta otras investigaciones: Shayer et al. (1976,1978) Citado por Dickson (1991), y en nuestro país, Vasco (1986), que han confirmado que muchos estudiantes terminan su bachillerato sin tener estabilizado el pensamiento formal. Lo que confirma la necesidad de vincular en los procesos de enseñanza elementos donde los estudiantes puedan utilizar el uso de los sentidos con la realización de actividades que van de lo concreto a lo formal, y donde se tienen en cuenta procesos como la manipulación, y la exploración en la construcción del conocimiento.
- Se consideran las recomendaciones de otros investigadores Suydam y Dessart (1976) citado por Dickson (1991) cuando afirman:

> Hay una regla cardinal, que se ha ido decantando por la experiencia y ha sido confirmada por la investigación: *El desarrollo de las ideas y destrezas matemáticas ha de partir de bases materiales concretas*. En general, los investigadores han concluido que la comprensión es mucho más fácil al utilizar

> materiales concretos (figuras, por ejemplo) y finalmente, por la presentación abstracta mediante símbolos. (p. 284)

Además, Suydam y Dessart (1976) citado por Dickson (1991), plantean que la progresión “concreto – semiconcreto- abstracto” vale tanto para las ideas nuevas presentadas a nivel secundario como en el nivel primario. (p.284)

Es por ello, que como elemento pedagógico, estamos de acuerdo con lo planteado por Vasco (1999), en que se debe partir de los sistemas concretos y no de sistemas simbólicos, distinguiendo en todo sistema matemático subsistemas como el concreto, el conceptual y el simbólico.

Aquí resaltamos la necesidad de insertar en el aula actividades que favorezcan el pensamiento concreto que faciliten la comprensión y que generen herramientas para el desarrollo del pensamiento formal y abstracto.

La siguiente figura, es la representación semiótica de carácter geométrico del Teorema de Pitágoras que se trabajó en el instrumento:

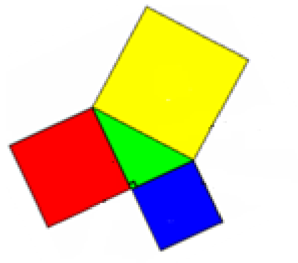


Figura 12. Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica

Esta representación geométrica es la que valida que el área de los cuadrados de los catetos es igual al área del cuadrado de la hipotenusa del triángulo rectángulo.

Es importante mencionar que existen múltiples representaciones de carácter geométrico del Teorema de Pitágoras, para ello se cita a Barreto (2009), escogiéndose ésta para facilitar los procesos de tratamiento y conversión en el aprendizaje del objeto matemático para estudiantes de grado séptimo.

Las siguientes representaciones fueron las construcciones de los estudiantes del Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica de este trabajo de investigación:

Representaciones de los estudiantes del Teorema de Pitágoras

Para favorecer los procesos cognitivos de visualización, el instrumento solicitó a los estudiantes la construcción de un triángulo rectángulo, reconociendo que la visualización matemática implica la capacidad del alumno en producirla, para que de cierta manera se pueda ver lo que representan y se reconozcan las relaciones entre las unidades figurales[2]. Para ello utilizaron materiales como papel milimetrado, cartulina y herramientas como transportador, regla y tijeras; al igual también construyeron los tres cuadrados, utilizando las medidas de los tres lados del triángulo.

Los triángulos construidos por los estudiantes, pertenecían a diferentes ternas pitagóricas, con el fin de facilitar la comparación de áreas en unidades cuadradas.

En esta acepción geométrica se identifican claramente 4 unidades figurales elementales de dimensión 2.

[2]Se entiende por unidad figural a aquellas figuras que aparecen como la combinación de valores para cada una de las variaciones visuales de tipo dimensional y cualitativo. Duval (2004.p.157).

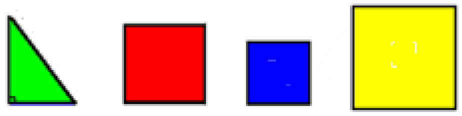


Figura 13. Descomposición en unidades significantes del Teorema de Pitágoras

Aprovechando el poder heurístico de las figuras geométricas, que permiten manipular, explorar y favorecer la búsqueda de la demostración, entendido como un proceso abductivo, que permite de entrada la clase de hipótesis (cuando se pide a los estudiantes verifiquen si es o no es igual el área de los cuadrados de los catetos con el cuadrado de la hipotenusa), captando así la atención sólo sobre aquellos caminos posibles para conducir a una conclusión. Respecto a la presentación de figuras no es suficiente el simple reconocimiento perceptivo de las unidades figurales, según Duval (2004) se plantea que : "Debe haber una interacción entre los tratamiento figurales que por abducción guían la *démarche*[3] heurística, y los tratamientos discursivos que por deducción constituyen la *démarche* basada en los objetos representados en la figura." (p.168).

Es por ello que la indicación verbal que ancla la figura como representación, gira alrededor de la siguiente pregunta:

¿Qué pueden concluir con relación a la comparación de las áreas de los cuadrados formados con los catetos y el cuadrado de la hipotenusa?

[3] Término francés que significa desempeño

Buscando provocar una aprehensión operatoria de las figuras, que conllevara a modificar la configuración inicial, los estudiantes desarrollaron tratamientos como conteo de las unidades cuadradas en las comparaciones de las áreas, pavimentación de superficies, cálculo de áreas por fórmula, entre otros.

A partir de este registro y los tratamientos que allí se dieron, viene la aprehensión discursiva que se refiere a aquel proceso cognitivo que implica la asociación de la configuración hallada con afirmaciones matemáticas.

Aquí se dio prioridad a la conversión efectuada de la representación no discursiva a la representación en lengua natural, considerando que la tarea descriptiva hace un llamado a la espontaneidad del sujeto.

Según Duval (2006), esta asociación se da como un cambio de anclaje que va desde una aprehensión visual a una aprehensión discursiva. Este cambio de anclaje es de suma importancia pues es el que facilita el proceso de conversión de la representación semiótica de un registro geométrico a un registro semiótico de lenguaje verbal.

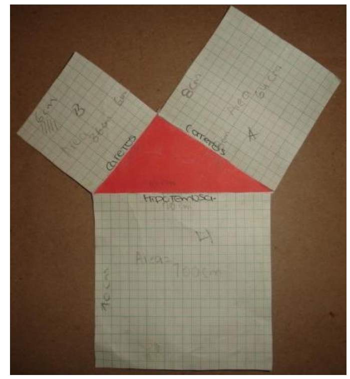
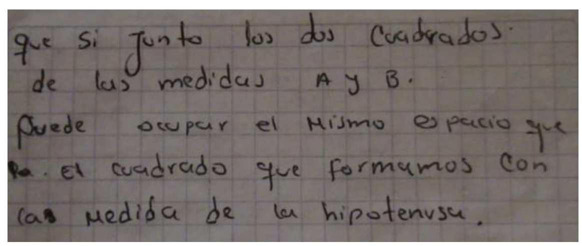
Según Torregrosa & Quesada (2007), la coordinación entre la aprehensión operativa de unidades figurales a la aprehensión discursiva, está relacionada con un proceso configural que permite resolver el problema aceptando las conjeturas por medio de una percepción simple. Conjetura sin demostración.

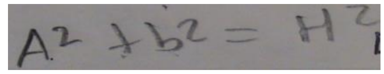
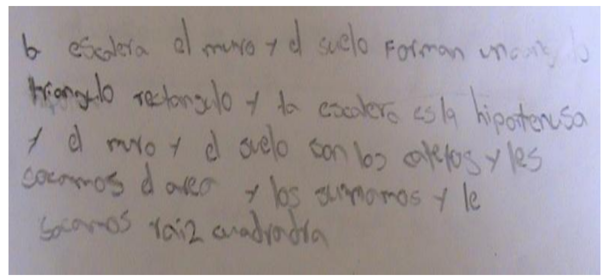
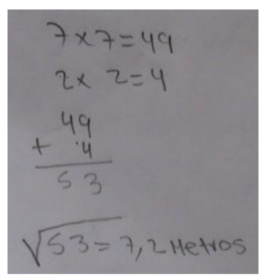
La conversión, considerada como proceso de transformación externa relativa a un registro de representación de partida, diferente a los procesos de tratamiento que son procesos de transformación internos dentro de un registro de representación, es considerado como uno de los procesos más complejos, ya que la simple conversión de registros de representación sin una coordinación entre ellos no garantiza la comprensión del objeto matemático. Esta coordinación se da cuando existe congruencia entre las unidades significantes de los registros de representación.

4.2 Análisis Interpretativo de Aspectos Relacionados con el Tratamiento y la Conversión de Representaciones Semióticas del Teorema de Pitágoras

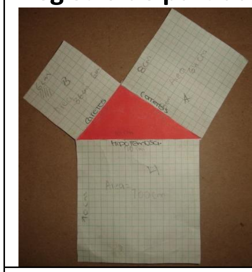
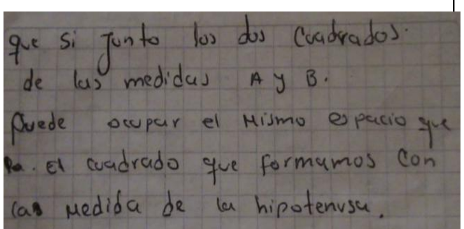
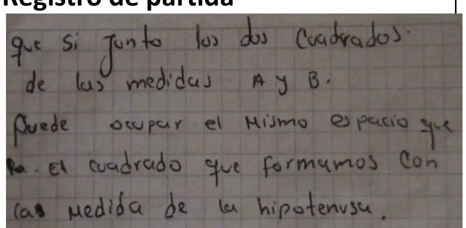
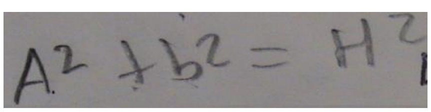
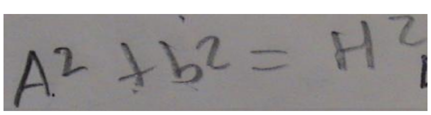
En este análisis interpretativo se sigue la matriz de análisis que se propuso en el procedimiento con el fin de detectar los procesos de tratamiento y conversión realizados por los grupos de estudiantes objeto de esta investigación:

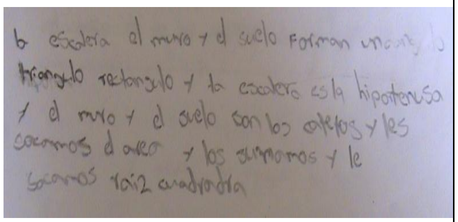
GRUPO DE TRABAJO 1.

	Tratamiento de la representación	Indicadores	Unidades significantes
LENGUAJE GEOMETRICO	TRATAMIENTO FIGURAL Aprehensión perceptiva Aprehensión operativa de reconfiguración	Comparan las áreas de los cuadrados por conteo de unidades cuadradas.	Trabajo grupal  "Contando los cuadros de las hojas milimetradas"… "Sumando los centímetros cuadrados"
LENGUAJE FORMAL	APREHENSIÓN DISCURSIVA Razonamiento deductivo	Elaboran conclusiones después de realizar comparaciones de las áreas de los cuadrados de los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo.	Acercamiento al concepto:  que si Junto los dos Cuadrados. de las medidas A y B. Puede ocupar el Mismo espacio que Pa. el cuadrado que formamos Con las medida de la hipotenusa. Razonamiento que va desde un anclaje del registro geométrico a un registro en lenguaje formal. Unidades significantes presentes: El trángulo rectángulo El área del cuadrado del cateto 1 El área del cuadrado del cateto 2 El área del cuadrado de la hipotenusa.

LENGUAJE ALGEBRAICO	TRATAMIENTO SIMBÓLICO	-Identifican las variables -Identifican del área del cuadrado por fórmula -Calculan por métodos algebraicos la hipotenusa	 Unidades significantes presentes: Los cuadrados de los catetos y el cuadrado de la hipotenusa
LENGUAJE NATURAL	Aprehensión discursiva	-Identifican formas geométricas como el triángulo rectángulo en otros contextos. -Relacionan los lados de triángulo rectángulo (catetos e hipotenusa) con otros elementos del contexto: Suelo y muro forman catetos y la Escalera forma hipotenusa -Describen procesos a seguir para el cálculo de la medida un lado desconocido del triángulo rectángulo, conociendo los otros dos lados	 "Escalera el muro y el suelo forman un triángulo rectángulo y la escalera es la hipotenusa y el muro y el suelo son los catetos y les sacamos el área y los sumamos y le sacamos raíz cuadrada"  Tratamiento Intervienen cuatro unidades significantes: El trángulo rectángulo formado y la relación entre sus lados

Conversión de una representación a otra

<table>
<tr><td></td><td colspan="4">CONGRUENCIA ENTRE REGISTROS DE REPRESENTACION</td></tr>
<tr><td>Transición de un registro representacional a otro</td><td>Unidades Significantes</td><td>Correspondencia semántica</td><td>Univocidad semántica terminal</td><td>Conservación del orden</td></tr>
<tr><td>Registro de partida
</td><td>Triángulo rectángulo
Cuadrado de cateto 1
Cuadrado de cateto 2
Cuadrado de hipotenusa</td><td rowspan="2">SI</td><td rowspan="2">SI</td><td rowspan="2">SI</td></tr>
<tr><td>Registro de llegada

que si junto los dos cuadrados de las medidas A y B. Puede ocupar el mismo espacio que la. el cuadrado que formamos con las medida de la hipotenusa.</td><td>Triángulo rectángulo
Área del cuadrado A
Área del cuadrado B
El área del cuadrado H</td></tr>
<tr><td>Registro de partida

que si junto los dos cuadrados de las medidas A y B. Puede ocupar el mismo espacio que la. el cuadrado que formamos con las medida de la hipotenusa.</td><td>Triángulo rectángulo
Área del cuadrado A
Área del cuadrado B
El área del cuadrado H</td><td rowspan="2">SI
(A y B representan los catetos y H la hipotenusa)</td><td rowspan="2">SI
La referencia al triángulo rectángulo, en ambos registros aparece de manera implícita</td><td rowspan="2">SI</td></tr>
<tr><td>Registro de llegada

$A^2 + b^2 = H^2$</td><td>Cuadrado de A
Cuadrado de B
Cuadrado de H</td></tr>
<tr><td>Registro de partida

$A^2 + b^2 = H^2$</td><td>Cuadrado de A
Cuadrado de B
Cuadrado de H</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Registro de llegada Situación 1  "Escalera el muro y el suelo forman un triángulo rectángulo y la escalera es la hipotenusa y el muro y el suelo son los catetos y les sacamos el área y los sumamos y le sacamos raíz cuadrada"	Triángulo rectángulo formado Altura del muro cateto 1 (A) Distancia del muro al pie de de la escalera cateto 2 (b) Largo de la escalera hipotenusa (H)	SI (A y B representan los catetos y H la hipotenusa)	SI Se considera la presencia de manera implícita del triángulo rectángulo en el primer registro y explícita en el segundo registro.	SI

Análisis de congruencia entre los diferentes registros de representación

Para realizar el análisis de congruencia entre los diferentes registros de representación utilizados por los estudiantes para el Teorema de Pitágoras, se hace necesaria la segmentación en sus unidades significantes:

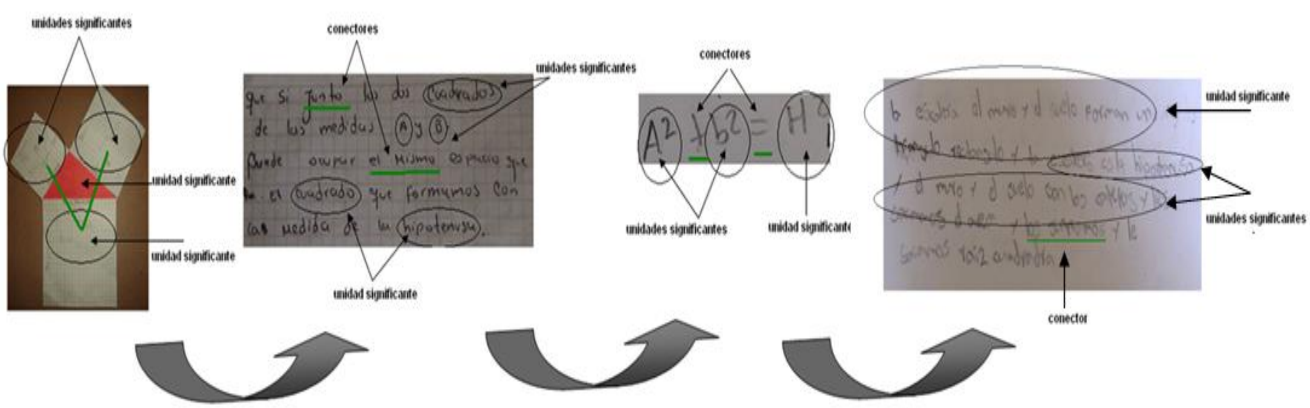


Figura 14. Congruencia entre registros de representación del Teorema de Pitágoras del grupo 1

En el gráfico pueden identificarse cuatro unidades significantes que se refieren a: El triángulo rectángulo, cuadrado del cateto a, cuadrado del cateto b y cuadrado de la hipotenusa. Como también conectores que van desde el lenguaje verbal al lenguaje algebraico y lenguaje natural.

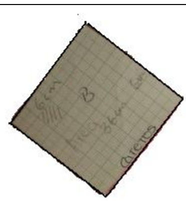
A continuación se exponen los aspectos relacionados con la congruencia de acuerdo con las condiciones planteadas por Duval, en los diferentes registros:

Correspondencia semántica**:** Se verifica que en los cuatro registros existe una correspondencia semántica, cada unidad significante simple de una representación, se asocia con otra unidad significante simple de la otra representación. Puede verse que se conservan las variables que identifican la medida de los lados de los cuadrados en los tres primeros registros (A, B y H).

Igual orden de aprehensión: Hay identidad entre la codificación de la representación semántica interna de las frases de los dos registros verbales y la representación simbólica de las operaciones aritméticas:

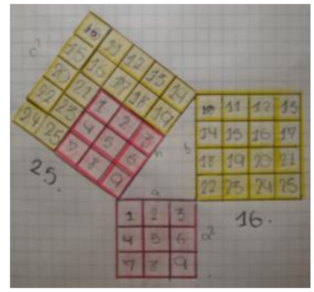
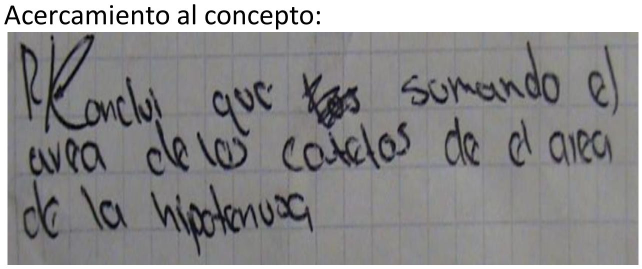
CODIFICACION INTERNA DE LAS REPRESENTACIONES		
Registro Lenguaje Verbal	**Registro Algebraico**	**Registro Lenguaje Natural**
“Junto”	“ + ”	“Sumamos”
“Lo mismo”	“ = ”	*Aunque no hay una codificación precisa que lo exprese como en los anteriores registros, si relaciona cómo hallar la solución con la información dada*

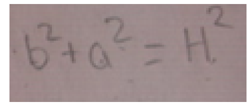
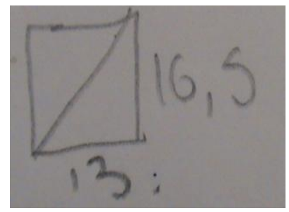
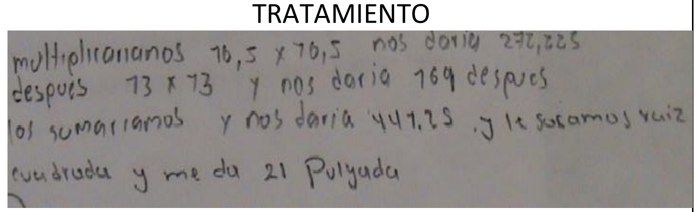
<u>Univocidad semántica terminal:</u> Puede verificarse dentro de las diferentes representaciones que a cada unidad significante de partida, le corresponde sólo una unidad significante de llegada:

Univocidad semántica terminal entre unidades significantes			
Registro geométrico	Registro Lenguaje Verbal	Registro Algebraico	Registro Lenguaje Natural
	Cuadrado A	A^2	"…el muro y el **suelo** son los catetos y les sacamos el área.."
	Cuadrado B	B^2	"…**el muro** y el suelo son los catetos y les sacamos el área.."
	Cuadrado Hipotenusa	H^2	" …la escalera es la hipotenusa"
	*Sólo hace alusión a la hipotenusa del triángulo*	*No hace referencia (presente de manera implícita)*	"Escalera el muro y el suelo forman un triángulo rectángulo"

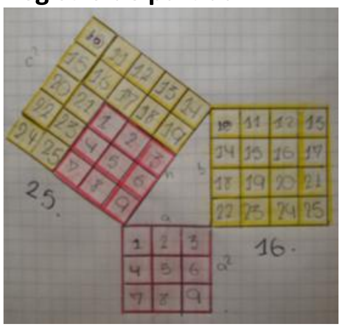
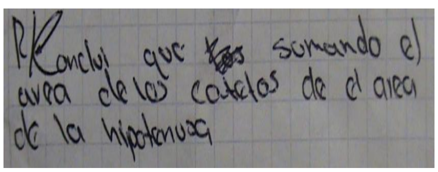
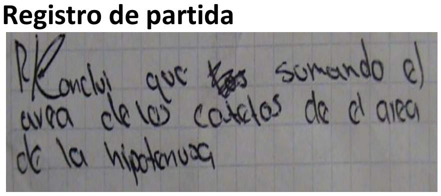
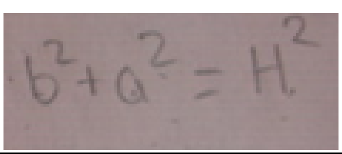
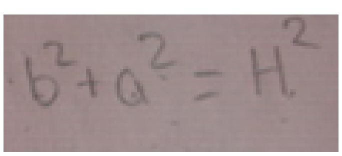
Es de anotar que se considera la presencia de la unidad significante relativa al triángulo rectángulo cuando hacen alusión a sus lados al mencionar los catetos o la hipotenusa.

GRUPO DE TRABAJO 2.

	Tratamiento de la representación	Indicadores	Unidades significantes
LENGUAJE GEOMETRICO	TRATAMIENTO FIGURAL Aprehensión perceptiva Aprehensión operativa de reconfiguración	Comparan las áreas por conteo de unidades cuadradas Como también por pavimentación de superficie cuando los identifican por colores	Trabajo grupal  “Contando los cuadritos que hay en el cuadrado” “Sumando todos los cuadritos que hay dentro de los cuadrados” Reconfiguración de unidades figurales de la figura de partida Que indican que hubo procesos de aprehensión operativa de reconfiguración, que desplaza por traslación las unidades cuadradas de los cuadrados de los catetos al cuadrado de la hipotenusa.
LENGUAJE FORMAL	APREHENSIÓN DISCURSIVA Razonamiento deductivo	Elaboran conclusiones después de realizar comparaciones de las áreas de los cuadrados de los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo.	Acercamiento al concepto:  Razonamiento que va desde un anclaje del registro geométrico a un registro en lenguaje formal. Unidades significantes presentes: El trángulo rectángulo El área del cuadrado del cateto 1 El área del cuadrado del cateto 2 El área del cuadrado de la hipotenusa.

LENGUAJE ALGEBRAICO	TRATAMIENTO SIMBÓLICO	-Identifican variables -Identifican del área del cuadrado por fórmula -Calculan por métodos algebraicos de la hipotenusa	 Unidades significantes presentes: Los cuadrados de los catetos y el cuadrado de la hipotenusa
LENGUAJE NATURAL	Aprehensión discursiva	-Identifican las formas geométricas como el triángulo rectángulo en otros contextos. -Relacionan los lados de triángulo rectángulo (catetos e hipotenusa) con otros elementos del contexto. -Describen los procesos a seguir para el cálculo de la medida un lado desconocido del triángulo rectángulo, conociendo los otros dos lados	  Cuando se les indagó sobre la solución al problema, respondieron: “Tenemos que medir sus pulgadas, y para medirla trazamos una línea diagonal. Al trazar la línea se forma un triángulo rectángulo de 90°, sabiendo las áreas de los catetos le sacamos la raíz.” TRATAMIENTO  “Multiplicaríamos 16,5 x 16,5 nos daría 272,225 después 13x13 y nos daría 169 después los sumaríamos y nos daría 441,25 . y le sacamos raíz cuadrada y me da 21 pulgada” Intervienen cuatro unidades significantes: El trángulo rectángulo formado y la relación entre sus lados

Conversión de una representación a otra

<table>
<tr><td></td><td colspan="4">CONGRUENCIA ENTRE REGISTROS DE REPRESENTACION</td></tr>
<tr><td>Transición de un registro representacional a otro</td><td>Unidades Significantes</td><td>Correspondencia semántica</td><td>Univocidad semántica terminal</td><td>Conservación del orden</td></tr>
<tr><td>Registro de partida
</td><td>Triángulo rectángulo
Cuadrado de cateto a
Cuadrado de cateto b
Cuadrado de hipotenusa</td><td rowspan="2">SI</td><td rowspan="2">SI</td><td rowspan="2">SI</td></tr>
<tr><td>Registro de llegada

</td><td>Triángulo rectángulo
Área del cuadrado A
Área del cuadrado B
El área del cuadrado H</td></tr>
<tr><td>Registro de partida

</td><td>Triángulo rectángulo
Área del cuadrado A
Área del cuadrado B
El área del cuadrado H</td><td rowspan="2">SI
(a y b representan los catetos y H la hipotenusa)</td><td rowspan="2">SI
La referencia al triángulo rectángulo, en el registro de llegada aparece de manera implícita</td><td rowspan="2">SI</td></tr>
<tr><td>Registro de llegada

</td><td>Cuadrado de A
Cuadrado de B
Cuadrado de H</td></tr>
<tr><td>Registro de partida

</td><td>Cuadrado de A
Cuadrado de B
Cuadrado de H</td><td>SI</td><td>SI</td><td>SI</td></tr>
</table>

Registro de llegada Situación 2  "Tenemos que medir sus pulgadas, y para medirla trazamos una línea diagonal. Al trazar la línea se forma un triángulo rectángulo de 90°, sabiendo las áreas de los catetos le sacamos la raíz."	Triángulo rectángulo formado (Largo, ancho y diagonal) Largo del TV cateto 1 (a) Ancho del TV cateto 2 (b) Diagonal hipotenusa (H)	(A y B representan los catetos y H la hipotenusa)	Se considera la presencia de manera implícita del triángulo rectángulo en el primer registro y explícita en el segundo registro.	

Análisis de congruencia entre los diferentes registros de representación

Segmentación de unidades significantes:

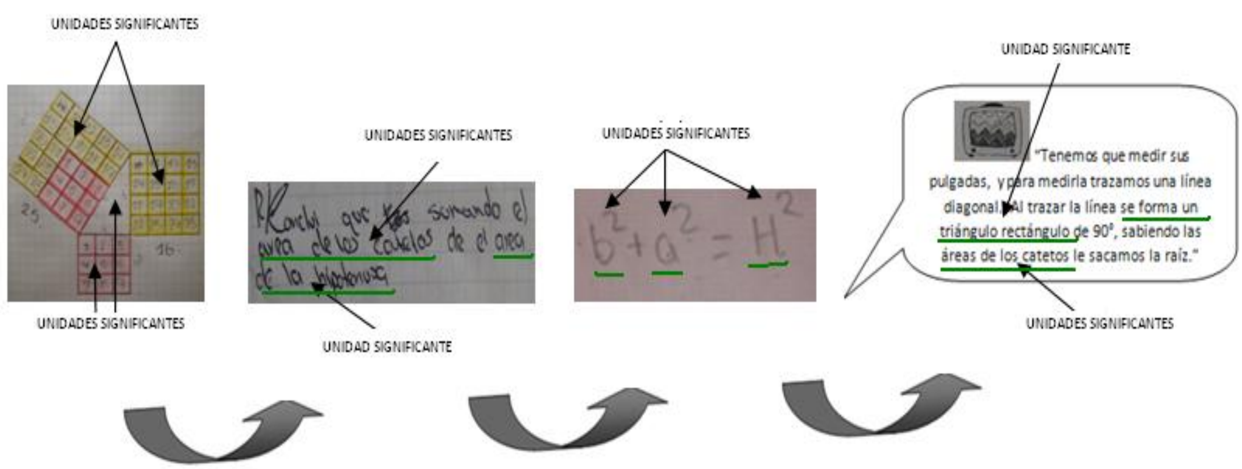


Figura 15. Congruencia entre registros de representación del Teorema de Pitágoras del grupo 2

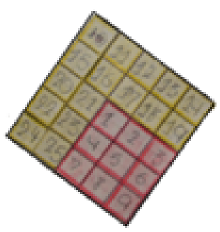
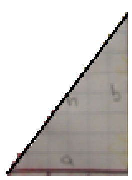
En el gráfico pueden identificarse cuatro unidades significantes que se refieren a: El triángulo rectángulo, cuadrado del cateto a, cuadrado del cateto b y cuadrado de la hipotenusa.

Correspondencia semántica**:** Se verifica que en los cuatro registros existe una correspondencia semántica, cada unidad significante simple de una representación, se asocia con otra unidad significante simple de la otra representación. Puede verse que se conservan las variables que identifican la medida de los lados de los cuadrados en los registros (a, b y h).

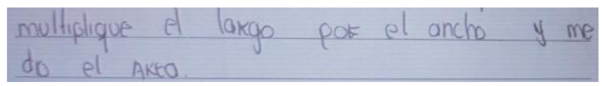
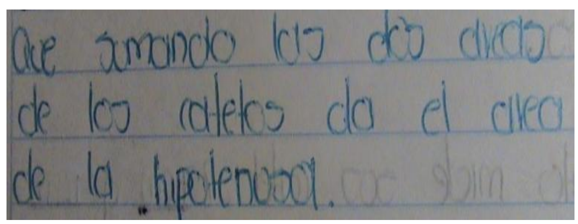
Igual orden de aprehensión: Hay identidad entre la codificación de la representación semántica interna de la frases de los dos registros verbales y las representación simbólica de las operaciones aritméticas:

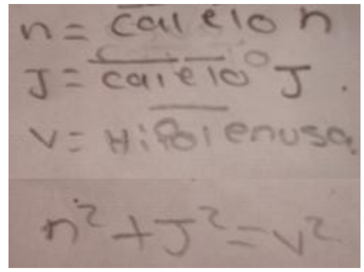
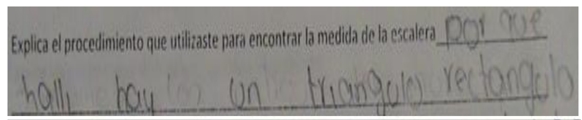
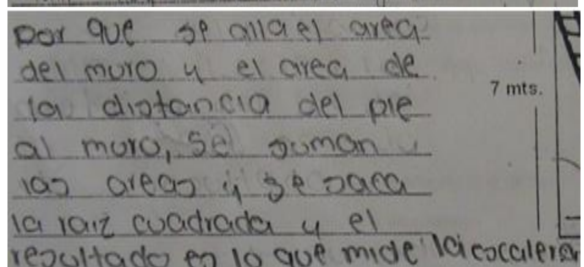
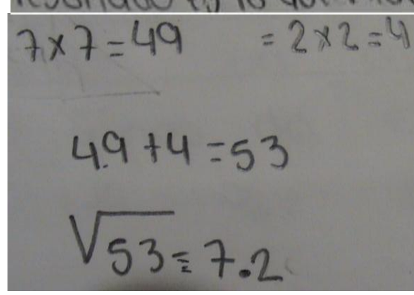
CODIFICACION INTERNA DE LAS REPRESENTACIONES		
Registro Lenguaje Verbal	Registro Lenguaje Algebraico	Registro Lenguaje Natural
"Sumando"	" + "	No está presente
"da el …" *Indicando como hallar el resultado*	" = "	*No aparece de manera explícita, aunque describe como se puede hallar el resultado*

Univocidad semántica terminal: Puede verificarse dentro de las diferentes representaciones que a cada unidad significante de partida le corresponde sólo una unidad significante de llegada:

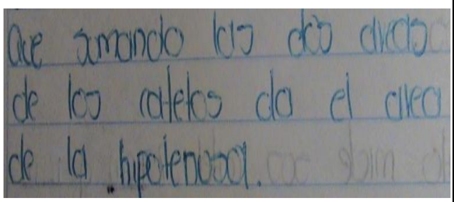
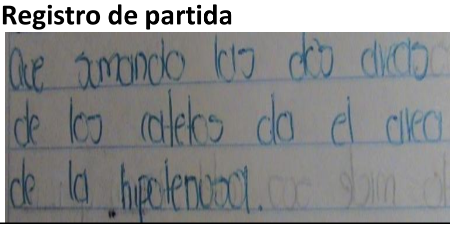
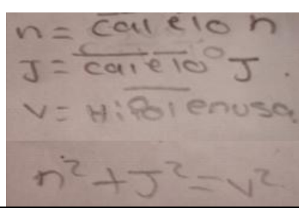
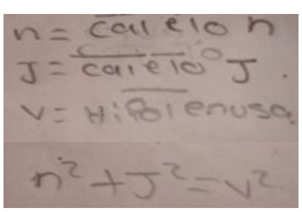
Univocidad semántica terminal entre unidades significantes			
Registro geométrico	Registro Lenguaje Verbal	Registro Lenguaje Algebraico	Registro Lenguaje Natural
	“Área de los catetos”	a^2	“…sabiendo las áreas de los catetos…” *Expresado en plural*
	“Área de los catetos” *Refiriéndose a las dos unidades significantes*	b^2	“…sabiendo las áreas de los catetos…” *Expresado en plural*
	“Área de la hipotenusa”	H^2	“trazamos una línea diagonal” *No aparece de manera muy explícita*
	*Hace alusión a los catetos y a la hipotenusa del triángulo*	*No hace referencia (presente de manera implícita)*	“…trazamos una línea diagonal. Al trazar la línea se forma un triángulo rectángulo de 90°…”

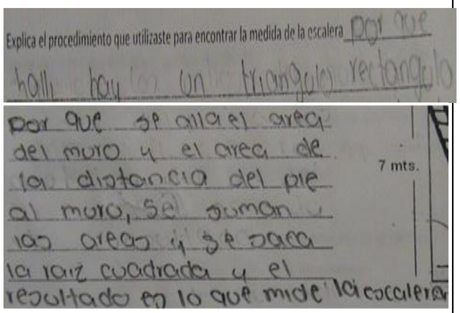
GRUPO DE TRABAJO 3.

	Tratamiento de la representación	Indicadores	Unidades significantes
LENGUAJE GEOMETRICO	TRATAMIENTO FIGURAL Aprehensión perceptiva Aprehensión operativa de reconfiguración	Comparan las áreas de los cuadrados utilizando la fórmula de área del cuadrado.	Trabajo grupal   “Multiplique el largo por el ancho y de me dio el área”
LENGUAJE FORMAL	APREHENSIÓN DISCURSIVA Razonamiento deductivo	Elaboran conclusiones después de realizar comparaciones de las áreas de los cuadrados de los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo.	Acercamiento al concepto:  Razonamiento que va desde un anclaje del registro geométrico a un registro en lenguaje formal. Unidades significantes presentes: El trángulo rectángulo El área del cuadrado del cateto 1 El área del cuadrado del cateto 2 El área del cuadrado de la hipotenusa.

LENGUAJE ALGEBRAICO	TRATAMIENTO SIMBÓLICO	-Identifican las variables -Identifican el área del cuadrado por fórmula -Calculan por métodos algebraicos de la hipotenusa	 Unidades significantes presentes: Los cuadrados de los catetos y el cuadrado de la hipotenusa
LENGUAJE NATURAL	Aprehensión discursiva	-Identifican las formas geométricas como el triángulo rectángulo en otros contextos. -Relacionan los lados de triángulo rectángulo (catetos e hipotenusa) con otros elementos del contexto. -Describen los procesos a seguir para el cálculo de la medida un lado desconocido del triángulo rectángulo, conociendo los otros dos lados	   Tratamiento Intervienen cuatro unidades significantes: El trángulo rectángulo formado y la relación entre sus lados

Conversión de una representación a otra

<table>
<tr><td></td><td colspan="4">CONGRUENCIA ENTRE REGISTROS DE REPRESENTACION</td></tr>
<tr><td>Transición de un registro representacional a otro</td><td>Unidades Significantes</td><td>Correspondencia semántica</td><td>Univocidad semántica terminal</td><td>Conservación del orden</td></tr>
<tr><td>Registro de partida
</td><td>Triángulo rectángulo
Cuadrado de cateto J
Cuadrado de cateto N
Cuadrado de hipotenusa V</td><td rowspan="2">SI</td><td rowspan="2">SI</td><td rowspan="2">SI</td></tr>
<tr><td>Registro de llegada
</td><td>Triángulo rectángulo
Las dos áreas de los catetos
Área de la hipotenusa</td></tr>
<tr><td>Registro de partida
</td><td>Triángulo rectángulo
Las dos áreas de los catetos
Área de la hipotenusa</td><td rowspan="2">SI
(N y J representan los catetos y V la hipotenusa)</td><td rowspan="2">SI
La referencia al triángulo rectángulo, en ambos registros aparece de manera implícita</td><td rowspan="2">SI</td></tr>
<tr><td>Registro de llegada
</td><td>Cuadrado de N
Cuadrado de J
Cuadrado de V</td></tr>
<tr><td>Registro de partida
</td><td>Cuadrado de N
Cuadrado de J
Cuadrado de V</td><td>SI
(N y J</td><td>SI
Se</td><td>SI</td></tr>
</table>

Registro de llegada Situación 1 	Triángulo rectángulo formado Altura del muro cateto 1 (A) Distancia del muro al pie de de la escalera cateto 2 (b) Largo de la escalera hipotenusa (H)	representan los catetos y V la hipotenusa)	considera la presencia de manera implícita del triángulo rectángulo en el primer registro y explícita en el segundo registro.	

Análisis de congruencia entre los diferentes registros de representación

Segmentación de unidades significantes:

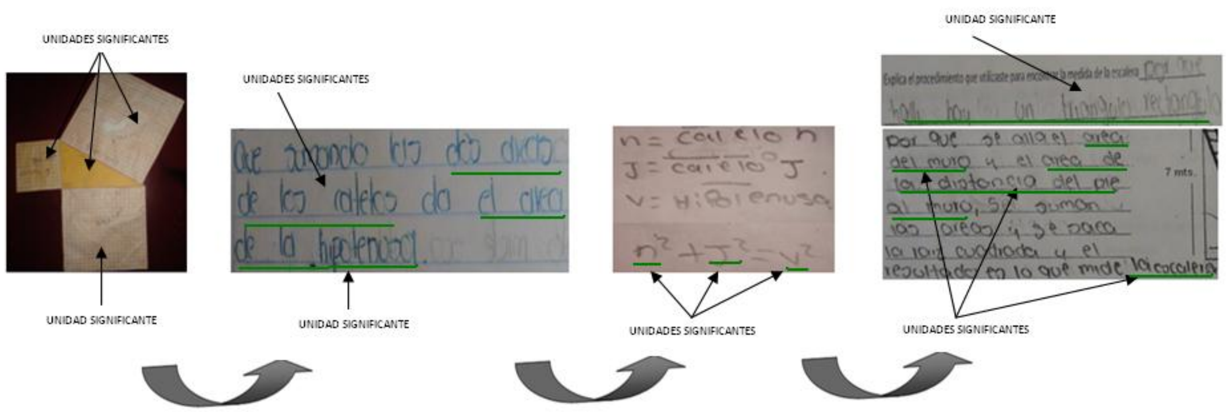


Figura 16. Congruencia entre registros de representación del Teorema de Pitágoras del grupo 3

En el gráfico pueden identificarse cuatro unidades significantes que se refieren a: El triángulo rectángulo, cuadrado del cateto a, cuadrado del cateto b y cuadrado de la hipotenusa. En los registros 2 y 3 la unidad significante que refiere al triángulo rectángulo aparece de manera implícita.

Correspondencia semántica**:** Se verifica que en los cuatro registros existe una correspondencia semántica, cada unidad significante simple de una representación, se asocia con otra unidad significante simple de la otra representación. Puede verse que se conservan las variables que identifican la medida de los lados de los cuadrados en los cuatro registros (N, J y V).

Igual orden de aprehensión: Hay identidad entre la codificación de la representación semántica interna de la frases de los dos registros verbales y las representación simbólica de las operaciones aritméticas:

CODIFICACION INTERNA DE LAS REPRESENTACIONES		
Registro Lenguaje Verbal	Registro Lenguaje Algebraico	Registro Lenguaje Natural
“Sumando”	“ + ”	“ …se suman”
“da …” *Indicando como hallar el resultado*	“ = ”	“ el resultado es”

Univocidad semántica terminal: Puede verificarse dentro de las diferentes representaciones que a cada unidad significante de partida, le corresponde sólo una unidad significante de llegada:

Univocidad semántica terminal entre unidades significantes			
Registro geométrico	Registro Lenguaje Verbal	Registro Lenguaje Algebraico	Registro Lenguaje Natural
	"Los dos catetos"	n^2	"…el área del muro …"
	"Los dos catetos" *Refiriéndose a las dos unidades significantes*	J^2	"…el área de la distancia del pie al muro…"
	"el área de la hipotenusa"	V^2	"y se saca la raíz cuadrada y el resultado es lo que mide la escalera"
	*Hace alusión a los catetos y a la hipotenusa del triángulo*	*No hace referencia (presente de manera implícita)*	"porque allí hay un triángulo rectángulo"

Aspectos relacionados con el tratamiento

En la representación de tipo geométrico, en el tratamiento dado por el grupo 1 y 2 se verifica lo que Duval (2004) denomina "operaciones de productividad heurística de las figuras como la reconfiguración, en donde se reorganizan una o varias sub- figuras diferentes de una figura dada en otra figura". (p.165):

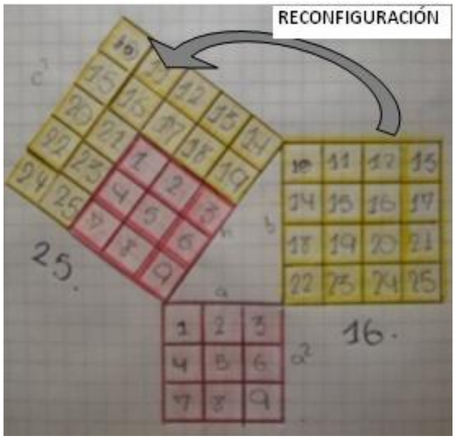
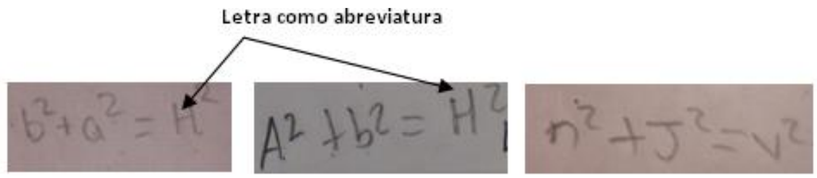


Figura 17. Tratamiento de representaciones

Donde las subconfiguraciones iniciales se manipulan como las piezas de un rompecabezas.

El tratamiento dado por el grupo 3, fue de orden unidimensional, donde emplearon métodos algebraicos en el cálculo de las áreas. Referente a las transformaciones heurísticas al discurso matemático, Duval (s.f, p. 56) independiente de la variaciones dimensional de las unidades figurales que puedan reconocerse en la figura, existe gran cantidad de transformaciones de una figura de salida que pueden hacerse con miras a encontrar la respuesta a una pregunta dada.

Respecto a la representación de tipo algebraica, es de anotar que a simple vista esta representación no muestra de manera explícita que se cumpla sólo para triángulos rectángulos, pues el uso de las letras que se identifican como variables no muestran una relación directa con catetos e hipotenusa. Sólo en los grupos de trabajo 1 y 2, los estudiantes hacen una relación directa con la letra “h” como abreviatura del nombre de la unidad significante en el registro verbal:



Nesselman (citado por Malisani,1999), plantea en cuanto al sistema de símbolos tres periodos distintos: Una fase retórica en el que se usa el lenguaje natural sin recurrir al signo, luego una fase sincopada, en la cual se introducen abreviaturas para las incógnitas, y por último una fase de lenguaje simbólico para resolver ecuaciones y demostrar reglas generales.

Aspectos relacionados con la conversión

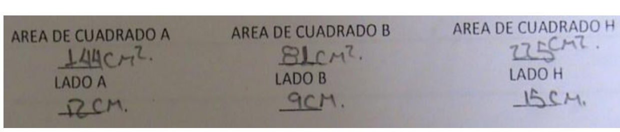
Los procesos de conversión representan según Duval (2006) un salto cognitivo, donde se requiere un amplio y complejo juego de transformación de representaciones para pensar, ya que un enfoque dualista de la actividad matemática conduce a negar su importancia cognitiva. Razón por la cual los procesos de conversión de representaciones es considerada como el primer umbral para la comprensión.

Estos procesos de conversión pueden pasar por dificultades específicas de no congruencia y no de naturaleza conceptual, lo que implica dificultades en el aprendizaje. Es por ello que a continuación se analizan los procesos de congruencia y coordinación entre las representaciones dadas en los estudiantes objeto de esta investigación:

Del lenguaje geométrico al lenguaje verbal

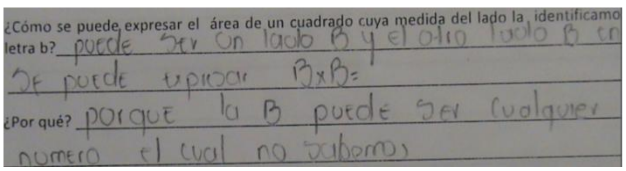
El funcionamiento representacional que implican las figuras en el lenguaje geométrico, vinculadas a una aprehensión operatoria de las formas, según Duval (s.f., p. 60), debe ser articulada objetivamente o de manera subjetiva coordinada con la aprehensión discursiva, implicando la variabilidad dimensional de las unidades figurales que se distinguen en una misma figura como es la relación entre los lados y el área de los cuadrados que están presentes como unidades figurales en la representación geométrica del Teorema de Pitágoras.

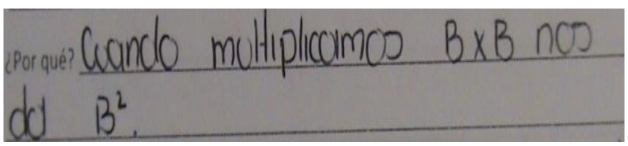
Respecto a esta variabilidad dimensional Duval (s.f.) plantea: " … en el reconocimiento de las unidades figurales de una figura se convierte en un fenómeno esencial a tomar en cuenta cuando se trata de articular la visualización geométrica y el discurso matemático, bien sea una simple descripción, una explicación o un razonamiento deductivo" (p.55). Es por ello que se hace necesario se realicen otras actividades para que se facilite dicho tránsito, ya que el tratamiento dado en el registro geométrico se utilizaron unidades figurales de dimensión 2 (unidades cuadradas) en su mayoría, y para lograr el reconocimiento del objeto matemático en otros registros de representación, como en el registro verbal y el algebraico han de focalizarse en unidades figurales de dimensión 1:

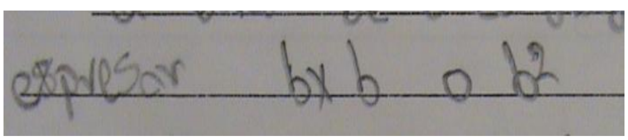


Del lenguaje verbal al lenguaje algebraico

El reconocimiento de variables en la modelación matemática y el cambio de dimensionalidad de unidades significantes que se da en el tránsito del registro geométrico al verbal y por último al algebraico, de manera paulatina, refleja en las representaciones hechas por los estudiantes que se dieron aspectos de congruencia entre las representaciones a la vez que correctos tratamientos dentro del registro algebraico.


¿Cómo se puede expresar el área de un cuadrado cuya medida del lado la identificamo
letra b? puede ser un lado B y el otro lado B en
se puede expresar B x B =
¿Por qué? porque la B puede ser cualquier
numero el cual no sabemos


¿Por qué? Cuando multiplicamos B x B nos
da B².


expresar b x b o b²

Cambio de dimensionalidad y reconocimiento variables

4.3 Análisis Comprensivo Desde el Aprendizaje del Objeto Matemático Teorema de Pitágoras

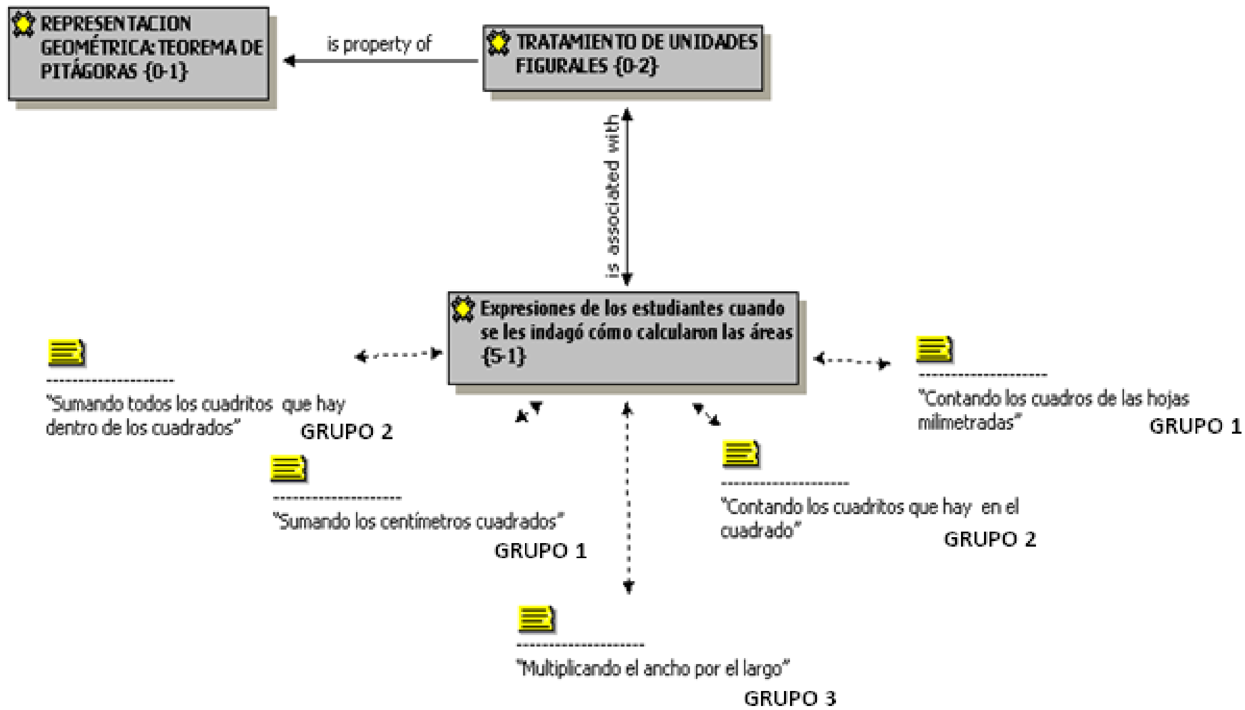
Si bien esta investigación centra su interés en los procesos de tratamiento y conversión de representaciones semióticas que realizan los estudiantes, es con el fin de comprender procesos de conceptualización y comprensión que los estudiantes realizan en el aprendizaje del objeto matemático.

Creemos que el uso de representaciones de tipo geométrico del concepto Teorema de Pitágoras, en esta investigación involucró el uso de procesos cognitivos de visualización en donde se muestran relaciones de unidades figurales. Como lo plantea R. Thom " es en la intuición que reside *l´ultima ratio*[4] de nuestra fe en la verdad de un teorema – un teorema que es ante todo, según una etimología olvidada hoy en día, el objeto de una visión" (Thom, 1972, p 230, citado en Duval, s.f, p.43).

Según Duval (2004), las unidades figurales constitutivas elementales utilizadas en la acepción geométrica son de dimensión dos, que aunque pueden descomponerse en unidades figurales elementales de dimensión inferior, la aprehensión perceptiva hace que exista una predominancia sobre las unidades de dimensión 2 que se explica por la ley gestaltista de cierre, cuando percibe los elementos como un todo.

El siguiente gráfico resume los diferentes tratamientos dados por los estudiantes que dan cuenta del concepto noción de área, necesaria para llegar a la comprensión del objeto matemático:

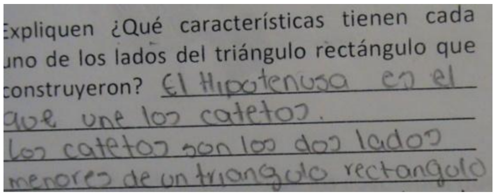
[4] Expresión que se traduce literalmente como "última razón" o "último argumento"



Según Torregrosa & Quesada (2007), los procesos de van de un anclaje visual a uno discursivo implica acciones cognitivas de asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas). (p.281)

Puede evidenciarse en todos los grupos de trabajo de los estudiantes objeto de esta investigación, que realizaron esta transferencia desde un anclaje visual a un anclaje discursivo, efectuando las asociaciones a modo de deducciones, inferencias y conclusiones.

Es importante resaltar la articulación del vocabulario técnico al lenguaje natural que permitió la construcción del concepto:



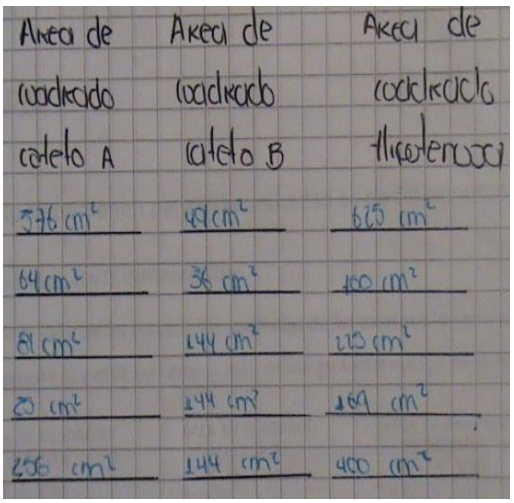
Expliquen ¿Qué características tienen cada
uno de los lados del triángulo rectángulo que
construyeron? El Hipotenusa es el
que une los catetos.
Los catetos son los dos lados
menores de un triangulo rectangulo

La etimología del lenguage matemático y el acercamiento al lenguaje común de estudiantado facilitó los procesos de comprensión .

Entendiendo aquí el uso del lenguaje algebraico como aritmética generalizada y el uso de las variables como generalizadores de patrones, este lenguaje asume gran importancia, pues es en este registro donde las cantidades numéricas pasan a ser identificadas con letras que representan cantidades indeterminadas, mostrando así la regla general de lo que contiene el Teorema de Pitágoras y la creación de un modelo matemático.

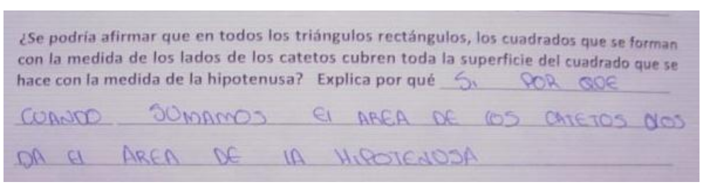
Estando de acuerdo con Treffers y Goffree (citado en MEN, 1998, p. 98) cuando describen la modelización como una actividad estructurante y organizadora, mediante el cual el conocimiento y las habilidades adquiridas se utilizan para descubrir regularidades y relaciones, donde además consideran que la generalización puede verse como el nivel más alto de la modelación. En la búsqueda de que el Teorema de Pitágoras sea identificado como un caso de generalización por los estudiantes, se realizaron múltiples comparaciones entre cuadrados de catetos e hipotenusas, con diversidad de valores, no sólo con termas pitagóricas, sino otros que ellos propusieron en el aula de clase.

Los estudiantes compararon datos en 2D de manera yuxtapuesta para el establecimiento de relaciones:



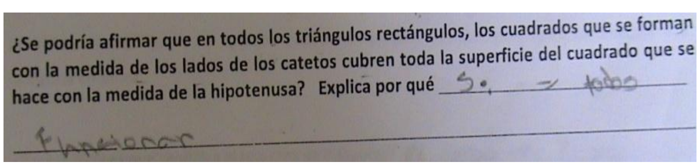
Area de cuadrado cateto A	Area de cuadrado cateto B	Area de cuadrado hipotenusa
576 cm²	49 cm²	625 cm²
64 cm²	36 cm²	100 cm²
81 cm²	144 cm²	225 cm²
25 cm²	144 cm²	169 cm²
256 cm²	144 cm²	400 cm²

Lista elaborada por el grupo de trabajo 3.



¿Se podría afirmar que en todos los triángulos rectángulos, los cuadrados que se forman con la medida de los lados de los catetos cubren toda la superficie del cuadrado que se hace con la medida de la hipotenusa? Explica por qué Si por que cuando sumamos el area de los catetos nos da el area de la hipotenusa

Grupo de trabajo 3



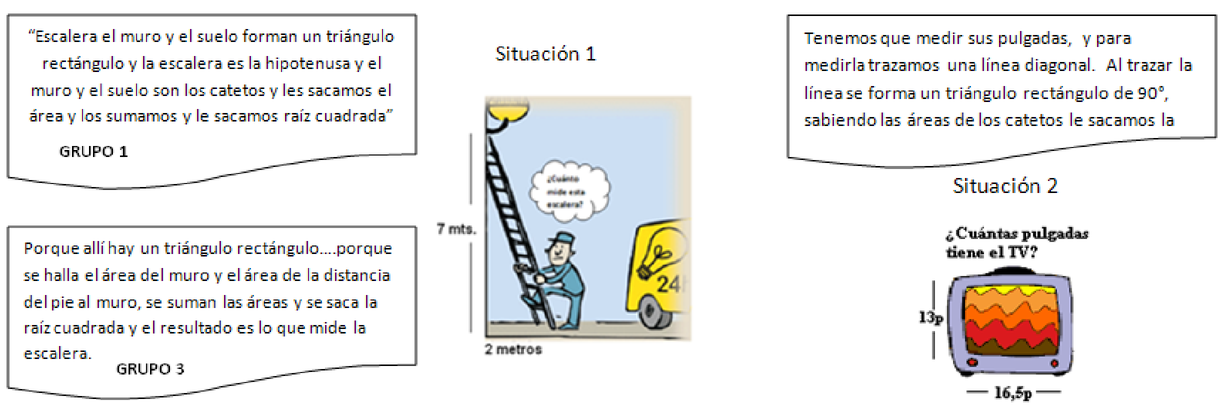
¿Se podría afirmar que en todos los triángulos rectángulos, los cuadrados que se forman con la medida de los lados de los catetos cubren toda la superficie del cuadrado que se hace con la medida de la hipotenusa? Explica por qué Si, todos

La actividad facilitó en los estudiantes lo que Duval (s.f.) llamó el paso de un demarche simple de enfoque puntual, que tiene que ver las unidades significantes antes planteadas, a un demarche de aprensión global que tiene que ver con toda la lista. Este tipo de visualización es de poder intuitivo y de tratamiento cualitativo. (p.71)

El tratamiento dado al símbolo literal o variable como número general, refleja el reconocimiento de patrones y regla de la secuencia numérica dada en las listas.

Entendiendo que lo que da sentido al aprendizaje de las matemáticas es que los estudiantes puedan aplicarlas en la solución de problemas que se presentan en la vida real, existe además, según Duval (2006) otra razón aún más interesante: "…que los estudiantes utilicen su experiencia física o diaria y sus representaciones mentales." (p.163).

Estando de acuerdo con Duval (2006) cuando platea que "… los estudiantes también deberían ser capaces de reconocer el mismo objeto matemático de conocimiento en otros contextos de representación y usarlos" (p.145). Puede verificarse en el estudio realizado que hubo procesos de comprensión:



De acuerdo con lo que plantea Torregrosa & Quesada (2007), cuando el estudiante identifica la situación con el triángulo y asocia el Teorema de Pitágoras con la configuración, se dice que hay una aprehensión discursiva. En este caso la transferencia va de un anclaje visual a uno discursivo. (p. 283)

CONCLUSIONES

El comprender las actividades cognitivas (de tratamiento y conversión) que realizan los estudiantes en el aprendizaje de objetos matemáticos como el teorema de Pitágoras nos permitió visualizar el proceso de aprendizaje que realizaron los estudiantes y el tipo de dificultades que se pudieron presentar con el uso de diferentes registros semióticos.

La identificación de estas actividades cognitivas, especialmente las de conversión, realizadas por los estudiantes objeto de esta investigación y empleadas de manera intencional en los instrumentos, a partir del reconocimiento de los aspectos de congruencia que tienen que ver con la correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen, igual orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones y la univocidad semántica; nos permitieron verificar que aunque existen múltiples representaciones semióticas alrededor del objeto matemático, especialmente en registros de tipo geométrico, no todas se constituyen como válidas para generar procesos de congruencia con otros tipos de representación semiótica, debido a que la simple conversión de registros de representación sin que existan condiciones de congruencia entre ellos, no garantiza la comprensión del objeto matemático.

Se reafirma la teoría de Duval (2004), donde se plantea que entre más representaciones semióticas se involucren alrededor de un objeto matemático (en este caso del Teorema de Pitágoras) y dentro de estas se faciliten condiciones de congruencia, se logra mayor aprendizaje, permitiendo al estudiante distinguir la diferencia entre el representante y lo representado, o representación semiótica y objeto matemático, reconocerlo en otros contextos de representación y establecer procesos de modelación, ya que el reconocimiento de invariante en las diferentes representaciones es lo que permite su aprendizaje .

Se reconoce en esta investigación el interés en las actividades cognitivas de conversión, ya que son en ellas, donde el estudiante puede reconocer los invariantes de cada una de las representaciones semióticas, lo que implica que se logran procesos de aprendizaje del objeto matemático.

El haber abordado inicialmente el registro semiótico de tipo geométrico del Teorema de Pitágoras, facilitó el tránsito a otros registros de representación, ya que les permitió iniciar sobre bases de tipo concreto y avanzar a la conversión de otros tipos de representación más abstractos del objeto matemático.

En el trabajo desarrollado con los estudiantes se identificaron actividades cognitivas que fueron de un anclaje de aprehensión visual a una aprehensión discursiva, efectuando las asociaciones a modo de deducciones, inferencias y conclusiones que permitieron crear el modelo matemático que se evidencia en el Teorema de Pitágoras. Este anclaje facilitó los procesos de conversión de la representación semiótica de un registro geométrico a un registro semiótico de lenguaje verbal y al tránsito a otros registros como el algebraico, generando en ellos habilidades para descubrir regularidades y relaciones que los llevan a establecer generalizaciones y procesos de modelación matemática.

Es importante reconocer en el instrumento aplicado, otros aspectos que favorecieron el tratamiento y la conversión de representaciones semióticas, como son la identificación de ideas previas de los estudiantes antes de abordar el objeto matemático, ya que sirvieron como elemento de partida del trabajo de aula y el reconocimiento de las representaciones semioticas iniciales. También favorecieron otros aspectos en el desarrollo de la actividad como los procesos de articulación del vocabulario técnico al lenguaje natural ya que la etimología del lenguage matemático y el acercamiento al lenguaje común del estudiantado facilita los procesos de comprensión.

La inclusión además, de otros aspectos que involucraban el manejo de estrategias de regulación y autorregulación y el trabajo en equipo, ayudaron a los estudiantes a ser más conscientes de sus procesos de comprensión.

RECOMENDACIONES

Teniendo en cuenta que las matemáticas en general, están dadas en un contexto de representación de objetos no tangibles, continuar investigando en el campo de las representaciones semióticas es esencial para la enseñanza, ya que son ellas las que nos permiten el acceso a los objetos matemáticos y al logro de procesos de comprensión en los estudiantes tal como lo plantea Duval desde su teoría de las representaciones semióticas.

La construcción del conocimiento en matemáticas, desde una postura constructivista, implica necesariamente que en aula de clase se adopten formas de hablar, escribir, de analizar … que constituyen nuestro lenguaje matemático. Es por ello que en el campo de la enseñanza se deben crear las condiciones para que los estudiantes tengan la posibilidad de representar esos objetos matemáticos, tratar con ellos y convertirlas a otros registros de representación.

El análisis de los procesos de conversión entre representaciones semióticas han sido un campo poco explorado en investigación de la didáctica de las matemáticas, en nuestro contexto es posible que muchas de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se deba al poco conocimiento que como docentes tenemos sobre el tema, es por ello que este trabajo invita a seguir investigando en ello.

Es necesario considerar al momento de abordar la enseñanza de las matemáticas, que aunque tengamos a disposición diversas representaciones semióticas alrededor de un objeto matemático, deberán tomarse en cuenta aquellas que faciliten procesos de congruencia entre ellas para efectos de su aprendizaje.

Como elemento pedagógico, creemos que al abordar diferentes registros semióticos, se debe iniciar con aquellas que partan de lo concreto, para avanzar a sistemas como el algebraico y otros más complejos o abstractos, ya que se facilitan los procesos de de comprensión en los estudiantes.

LISTA DE REFERENCIAS

Barreto, J. C. (10 de abril de 2009). *Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática*. (S. C. matemáticas, Editor, & N. R. matemáticas, Productor) Recuperado el 10 de 12 de 2009, de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/70/Articulos_01.pdf.

D'amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. (págs. 35-106). Barcelona España: Uno.

Del Olmo, M., & Moreno, M. &. (1993). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrd: Síntesis.

Dickson, L., Brown, M., & Gibson, O. (1991). *EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.* Madrid: Labor S.A.

Duval, R. (2004). *SEMIOSIS Y PENSAMIENTO HUMANO.* Cali, Colombia: Universidad del Valle , Instituto de educación y pedagogía, Grupo de Educación matemética.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática :La habilidad para cambiar el registro de representacón. *LA GACETA DE LA RSME , Vol 9.1*, p.143-168.

Duval, R. (s.f). VER EN MATEMÁTICAS. *MATEMÁTICA EDUCATIVA* , 41-76.

Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación de didáctica de las matemáticas. *EMA , 7* (2), 127-170.

Garciadiego, A. (2002). EL TEOREMA DE PITÁGORAS COMO PARADIGMA DE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA PLANA: SIMPLIFICAR NO SIEMPRE SIMPLIFICA. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa , Vol. 5* (No 03), p.251-270.

Hernandez Sampieri, R., Fernández-Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación.* Mexico: Mc Graw Hill.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. ICFES. (2009). Recuperado el 2009, de http://www.icfessaber.edu.co

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. ICFES. (2007). *Marco Teórico de las pruebas de matemáticas.* Bogotá D.C: ICFES.

Jorba, J. & Sanmartí, N. (1994). *Enseñar, Aprender y Evaluar: un proceso de evaluación continua. Propuestas didácticas para las áreas de Ciencias de la Naturaleza y Matemáticas.* Barcelona: MEC.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. *IRICE Instituto Rosario de investigaciones en ciencias de la educación* (13), 27.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2009). *PRUEBAS SABER*. Recuperado el 2009, de http://menweb.mineducacion.gov.co

Strathern, P. (1999). *Pitágoras y su teorema.* Madrid, España: Siglo veintiuno de España Editores s.a.

Strauss, A., & Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada.* Medellín: Universidad de Antioquia.

Torregrosa, G., & Quesada, H. (2007). COORDINACIÓN DE PROCESOS COGNITIVOS EN GEOMETRÍA. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa , 10* (2), p.275-300.

Vasco, C. E. (2006). *Didáctica de las matemáticas.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Vasco, C. E. (1986). *EL ENFOQUE DE SISTEMAS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.* Bogotá D.C.: Norma S.A.

Vergnaud, G. (1990). LA TEORIA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES. *Recherches en Didáctique des Mathématiques , Vol.10* (2,3), 133-170.

ANEXOS

- INSTRUMENTO EXPLORACIÓN DE IDEAS PREVIAS
- INSTRUMENTO UNIDAD DIDACTICA